



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Interpolación numérica aplicada ao cálculo da altitude na
Carta Xeométrica de Galicia de Domingo Fontán

Ana Suárez Gamarra

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Interpolación numérica aplicada ao cálculo da altitude na
Carta Xeométrica de Galicia de Domingo Fontán

Ana Suárez Gamarra

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Departamento Matemática Aplicada

Título: Interpolación numérica aplicada ao cálculo da altitude na Carta Xeométrica de Galicia de Domingo Fontán

Breve descripción do contido:

O obxectivo do TFG é estudar métodos de interpolación, profundando nos estudos realizados no Grao en Matemáticas. O traballo conterà a escritura dalgúns dos métodos en Matlab/OCTAVE e tamén empregaranse métodos xa definidos en Matlab/OCTAVE. Como aplicación desta metodoloxía traballarase coa altitude e a presión atmosférica, e estudarase como Domingo Fontán calculou a altitude de moitos cumios a partir da presión atmosférica. Os datos da presión en diferentes localidades de Galicia poden obterse a partir de datos medidos, ou proporcionados por estacións metereolóxicas. Os valores das altitudes obtidos numericamente poden ser comparados cos datos proporcionados polos Sistemas de Información Xeográfica (SIX) e analizar as precisións das aproximacións calculadas.

A presenza de dous titores no traballo amosa a compoñente multidisciplinar tan evidenciada na traxectoria do matemático e xeógrafo Domingo Fontán, e permitirá achegar á persoa que desenvolva o TFG opcións de aplicación das matemáticas, valorando a innovación achegada por Fontán hai douscentos anos.

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	XI
1. Carta Xeométrica de Galicia	1
2. Obxectivo. Métodos e procedemento	7
3. Resultados	25
4. Análise dos cálculos de Fontán	43
5. Conclusións	61
Bibliografía	63

Resumo

Neste traballo aplicamos a interpolación numérica ao cálculo da altitude na Carta Xeométrica de Galicia de Domingo Fontán. Traballaremos coa presión atmosférica e estudaremos como Domingo Fontán calculou a altitude de moitos cumios a partir de medicións desta variable. Os valores das altitudes obtidos, por interpolación e con diferentes fórmulas de Laplace, compararanse cos datos proporcionados polos Sistemas de Información Xeográfica analizando a precisión dos mesmos.

Abstract

In this work we apply numerical interpolation to the calculation of altitude in the Geometric Map of Galicia by Domingo Fontán. We will work with atmospheric pressure and we will study how Domingo Fontán calculated the altitude of many summits from measures of this variable. The values of altitudes obtained, by interpolation and with different Laplace formulas, will be compared with the data provided by the Geographic Information Systems analyzing the precision of them.

“Lejos de soñar en cargos públicos y aspirando tan solo á ser útil á Galicia consagré á este objeto mis ahorros, mi salud y mis tareas científicas por mas de docena y media de años, logrando resultados que sabrá apreciar la posteridad cuando se sometan á la censura pública la Carta geométrica de este antiguo reino y las operaciones que le sirvieron de base, trabajo que espero verá la luz pública en todo el año de 1840”.

Domingo Fontán

Introdución

Domingo Fontán (1788-1866) foi un matemático que dedicou gran parte da súa vida á elaboración da súa obra magna, a Carta Xeométrica de Galicia que puxo á Galicia na vangarda da cartografía e que posteriormente serviría como base cartográfica de proxectos de ferrocarril e estradas e fonte para a elaboración doutros mapas. O mapa de Fontán mantivo a súa vixencia ata a elaboración das follas de Galicia do Mapa Topográfico Nacional a escala 1:50000 finalizadas no decenio posterior á Guerra Civil.

Domingo Fontán Rodríguez naceu na aldea de Porta do Conde (concello de Portas), nas terras de Caldas. Foi o segundo de cinco irmáns, dous homes e tres mulleres. Domingo comezou a súa formación na parroquia de Baliñas, no concello de Barro, con poucos anos se traslada a Noia xunto con seu irmán Andrés, o primoxénito, a estudar co seu tío materno Sebastián Rodríguez Blanco cura párroco nesta vila.

Nesta idade temperá aprendeu, cuns relixiosos fuxidos da revolución francesa de 1879, a lingua científica de referencia na época e a lingua inglesa, que lle sería de utilidade na elaboración da súa obra fundamental (datos recollidos en [1]).

Aos 12 anos iniciou os seus estudos de Filosofía na Universidade de Santiago, onde ademais estudou nestas aulas, Teoloxía, a lingua hebrea, as Sagradas Escrituras, Institucións Canónicas, Artes, Retórica, Lóxica e Ciencias Exactas e Naturais como aritmética, álgebra, xeometría e física experimental, tal como era costume.

No ano 1802 con 14 anos acadou o grao de Bacharel e en 1811 comeza a súa actividade docente como substituto na cátedra de retórica. Ese mesmo ano, con 23 anos de idade,

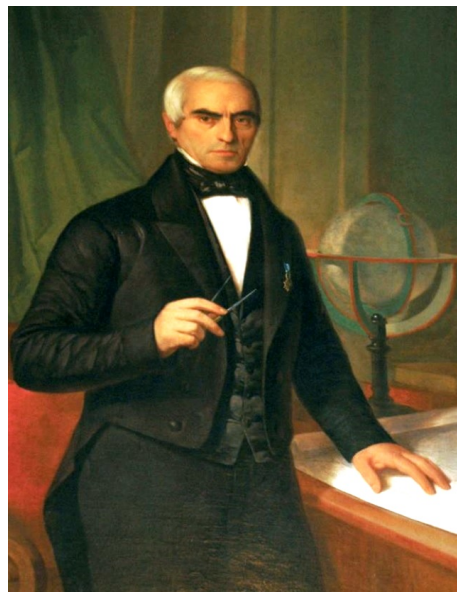


Figura 1: Retrato de Domingo Fontán, de Antonio María Esquivel (Universidade de Santiago de Compostela).

obtéñ o doutoramento en Teoloxía e posteriormente as licenciaturas de Filosofía e Artes e o doutoramento en Artes, e nos anos sucesivos, entre 1813 e 1814, consegue as cátedras de Lóxica e Metafísica facéndose cargo destas doutrinas nas aulas.

Entre 1814 e 1818 substituíu ó seu antigo profesor Xosé Rodríguez na cátedra de Matemáticas Sublimes por mor dos seus compromisos internacionais. Xosé Rodríguez foi unha figura importante na obra de Domingo, partidario de situar o coñecemento e a ciencia como instrumentos de cambio social e a prol do progreso. Xosé Rodríguez, coñecido como o matemático do Bermés, realizaría na súa vida dúas obras fundamentais: participou nos labores de prolongación do arco de meridiano Dunkerque-Barcelona ata Formentera e Eivissa co fin de calcular o valor exacto do metro xunto cos científicos franceses Arago e Biot, e recibiu o encargo de realizar os cálculos e as medicións necesarias para elaborar un Mapa exacto de España. A Rodríguez e Fontán uníranse unha serie de científicos (matemáticos, médicos, químicos, farmacéuticos) que tiñan en común a súa posición liberal, como foron José Alonso López y Nobal, Eusebio Bueno Martínez, José Francisco Vendrell, Gabriel Fernández Taboada, Julián Suárez Freire e Juan Bautista Camiña. Tentaron modernizar a universidade e constituíron os colexios prácticos de Santiago nos que impartían materias científicas.

En 1818 gañou por oposición a cátedra de Matemáticas Sublimes, na que permanecería ata 1835. A partir da segunda metade do século XVIII fíxose frecuente o uso da expresión “mathématiques sublimes” para designar a análise ou cálculo infinitesimal, é dicir, mostra un desexo de marcar o carácter non elemental dos conceptos de cálculo infinitesimal (Christian Gilain, 2010) [2].

O labor docente de Domingo Fontán foi prolífico, así en 1834 obtivo a cátedra de Xeometría Mecánica e Delineación Aplicadas ás Artes e a de Física, Mecánica e Delineación das Artes da Sociedade Económica de Santiago.

En 1828, xa exercendo como catedrático, alcanzou o grao de bacharel en Leis. En 1824 casou con Manuela Ribas, natural de Santiago coa que tivo tres fillos: Félix, Manuel e Rosendo (datos recollidos en [3]).

Como xa foi mencionado, Fontán politicamente profesaba unha ideoloxía liberal ao igual que Xosé Rodríguez e moitos científicos do seu entorno. Dita ideoloxía levounos a sufrir a represión do absolutismo restaurado por Fernando VII tras a guerra da Independencia en 1814. Así Domingo foi denunciado polo claustro polas súas ideas e separado da docencia ata o ano seguinte en que foi absolto. Peor sorte correrían moitos dos seus compañeiros, entre eles Xosé Rodríguez, que sufriron a persecución e o exilio.

No 1817 obtivo o seu primeiro cargo político ao ser nomeado membro da Xunta de Reparticións de Tributos en representación do Salnés. En 1820 foi nomeado secretario da

Deputación Provincial de Galicia e en 1822 da Deputación Provincial da Coruña (suprimida un ano máis tarde), mais coa restauración do absolutismo fernandino de 1823 sería suspendido deste cargo e da cátedra. En 1826 un decreto declarouno “purificado” e puido volver á docencia. Ese mesmo ano encárgaselle a división xudicial e municipal de Galicia e en 1829 foi nomeado responsable do trazado das estradas que se abrirían na xeografía galega. En 1834 foi nomeado individuo da Comisión de Rectificación que se encargaría da división municipal e das provincias. Un ano máis tarde encomendóuselle a formación do Corpo de Enxeñeiros de Camiños, Minas e Montes e o cargo de director do Observatorio Astronómico de Madrid e da nova Escola Especial de Enxeñeiros Xeógrafos e en 1836 foi designado membro da comisión destinada a elaborar o sistema de pesos e medidas (ver [3]).

Domingo Fontán foi parlamentario polo partido liberal moderado durante oito lexislaturas comprendidas entre 1836 e 1843, elixido deputado por Pontevedra en cinco ocasións e por Lugo en catro. Formou parte de diferentes comisións parlamentarias e foi cuarto secretario do Congreso. Das intervencións no Congreso destacan as relacionadas coa organización do Estado. Fontán a pesar de ser partidario do centralismo territorial, situouse a favor das deputacións provinciais e concellos con poder efectivo sobre o territorio sempre que estivesen dotados do orzamento necesario, coa facenda pública, na que en diversas ocasións insistiu en que as contas públicas fosen examinadas polas Cortes, e co proxecto constitucional, defendeu o principio de soberanía nacional e dun maior peso das Cortes nas decisións do Goberno. Rexeitou o restablecemento dos foros en Navarra e nas Vascongadas por ser contrario ós privilexios das persoas, en concreto ós privilexios do clero e dos territorios. Despois de case 10 anos enfocado na actividade parlamentaria en Madrid, establecece en Santiago de Compostela definitivamente. Comeza así unha nova etapa na vida de Domingo Fontán centrada na actividade empresarial.

En 1843 herdou xunto ao seu irmán, o patrimonio do seu tío, entre o que se atopaban as accións dunha fábrica de papel do Castro, no concello de Lousame (A Coruña), fundada en 1810 e na que os irmáns decidiron investir o resto da herdanza en adquirir a maioría das accións da fábrica, que sería recoñecida pola súa fabricación de papel timbrado para o Estado (ver [4]).

O 10 de decembro de 1851 foi xubilado do seu labor docente, aínda que non cesará a súa actividade científica.

Como grande achega a Galicia destaca a participación en diferentes informes sobre o ferrocarril en Galicia, liñas Santiago-Carril (1860), Santiago-Betanzos-Ferrol (1863) e a do nunca executado Ferrocarril Central de Galicia (1860) seguindo o curso do río Ulla de oeste a leste. Elaboráronse documentos cartográficos a partir da Carta Xeométrica. Impulsará

así o proxecto do ferrocarril en Galicia a través da vicepresidencia da Xunta Mixta, que se encargará do estudo e deseño do trazado, obtendo a concesión do ferrocarril por parte da raíña. O mapa de Fontán situará Galicia por moitos anos como o territorio con mellor representación cartográfica de España (ver [1]).

Nos seus últimos anos continuou traballando para a fábrica do Castro e no proxecto do ferrocarril. Xogou un papel importante na exposición compostelá de 1858, onde se expuxo a Carta Xeométrica, e na Real Sociedade Económica de Amigos do País de Santiago, exercendo varios cargos. Domingo Fontán finou en Cuntis (Pontevedra) aos 78 anos de idade, a causa dunha cistite aguda. Dende 1988 os seus restos atópanse no Panteón de Galegos Ilustres.

Capítulo 1

Carta Xeométrica de Galicia

Fontán iniciou en 1817 a elaboración da Carta Xeométrica de Galicia, un mapa moderno e rigoroso do noso territorio. Tomou a decisión de facer un mapa de Galicia para así resolver os problemas do territorio, como o trazado das infraestruturas, a organización territorial ou o seu desenvolvemento. Contou co apoio de seu mestre Xosé Rodríguez, os seus colaboradores e a licenza da universidade. O levantamento dun mapa de Galicia mediante medicións xeodésicas e traballo de campo foi un labor sen precedentes. Vexamos cómo foi posible debuxar ao detalle todo un país a comezos do século XIX. Fontán débelle a Rodríguez a idea de iniciar a triangulación e cartografado de Galicia. Grazas ás viaxes ó estranxeiro de Rodríguez mantívose informado dos avances que se producían en Europa e obtivo os instrumentos precisos para as súas medicións, como o metro legal adquirido por Rodríguez en París. Desta cidade Fontán tamén recibiu o teodolito ou “círculo repetidor astronómico de Gambey”, empregado no levantamento cartográfico, ao igual que o teodolito Troughton e un sextante de peto.

Para realizar a Carta o método utilizado consistía na medición dunha base central e unha rede fundamental de triángulos, procedemento proxectado por Jorge Juan para levantar o mapa de España na metade do século XVIII, ao que lle engadiu medicións que incrementaron a precisión e o dotaron de valores como a altitude dos principais cumios (ver [3]). O xeógrafo nas súas notas afirmaba: “Como ningún triángulo puede ser conocido por la

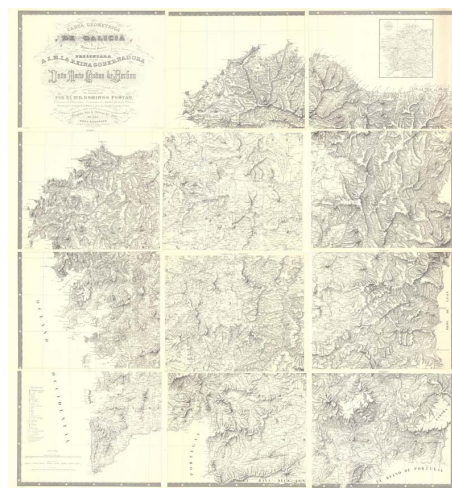


Figura 1.1: Carta Xeométrica de Galicia.

sola medida de sus ángulos, sin tener la medida de uno de sus lados que toma el nombre de base” (ver [5])¹. Así Fontán procedeu á triangulación do país medindo un dos lados dos seus triángulos (base) para coñecer a medida dos outros dous, formando unha rede de triángulos. Os vértices dos triángulos denomínanse estacións que mediante observacións astronómicas sitúanse en función da súa latitude, lonxitude e acimut. Fontán nas súas operacións xeodésicas aplicou os Teoremas de Delambre de trigonometría esférica², pois ao ser a Terra unha esfera, os lados dos triángulos non son rectos senón curvos (ver [5]). A carta foi realizada a escala 1:100000 o que supón a introdución do sistema métrico na planimetría, feito moi relevante para Galicia e para o resto do Estado. A altitude é expresada nas unidades tradicionais: “Las alturas sobre el nivel del mar son varas castellanas” (cita de Domingo Fontán recollida en [3], unha vara son 0,835 m). Fontán usou o metro desde 1817, cando en España non foi medida oficial ata a aparición da lei de xullo de 1849, que unifica todas as medidas e pesos.

A carta está formada en proxección Flamsteed modificada ou proxección de Bonne. Nesta proxección as deformacións aumentan rapidamente a medida que un se afasta do meridiano de orixe, polo que Fontán optou por usar o meridiano do observatorio de San Fernando. A proxección de Bonne é unha proxección cartográfica xeométrica pseudocónica de áreas equivalentes que ten escala real ao longo de todos os paralelos e o meridiano central.

As pseudocónicas son proxeccións nas que os paralelos xeográficos represéntanse cunha familia de arcos de circunferencias concéntricas. Acostuman formularse en coordenadas polares do plano (ρ, γ) , sendo ρ o raio e γ o ángulo polar, como funcións das coordenadas xeográficas (φ, λ) , onde φ é a latitude e λ a lonxitude. Faise corresponder de forma bixectiva, agás puntos singulares, a superficie pechada elipsoide cunha parte do plano. As coordenadas planas (ρ, γ) convértense nas cartesianas do plano (x, y) .

As pseudocónicas teñen como fórmula xeral $\{\rho = f_1(\varphi), \gamma = f_2(\varphi, \lambda)\}$. O raio é función exclusiva da latitude e o ángulo polar é función tanto da latitude como da lonxitude.

Os paralelos correspóndense con circunferencias concéntricas e os meridianos son curvas simétricas respecto ao meridiano central onde se atopa o centro das circunferencias dos paralelos. As retículas dos meridianos e paralelos non son ortogonais.

A definición faise a partir dun punto orixe $P_0(\lambda_0, \varphi_0)$, de maneira que os eixos de abscisas e ordenadas son a tanxente ao paralelo de punto (paralelo orixe) e a recta transformada do meridiano que pasa por dito punto. É este o único meridiano rectilíneo e, tanto el como os

¹**Teorema do seno:** Nun triángulo esférico os senos dos lados son proporcionais aos senos dos ángulos opostos. Sexa ABC un triángulo esférico sobre unha esfera de raio r e sexan a, b e c os lados do triángulo esférico, logo verificase: $\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$ (ver [6]).

²**Analoxías de Gauss – Delambre:**
 $\frac{\text{sen } \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \frac{\text{sen } \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{a-b}{2}}{\text{sen } \frac{c}{2}}, \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\text{sen } \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}, \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\text{sen } \frac{C}{2}} = \frac{\text{sen } \frac{a+b}{2}}{\text{sen } \frac{c}{2}}$ (ver [6]).

paralelos serán automecoicos. Como a proxección é equivalente o módulo de deformación superficial debe ser igual a 1 (ver [7]).

En 1817, Fontán obtivo mediante observacións astronómicas, a lonxitude, latitude e acimut da torre do Reloxo da Catedral de Santiago coa maior exactitude posible. Este cálculo é indispensable, debendo preceder a construción dos paralelos e meridianos da carta á dos vértices dos triángulos segundo a respectiva latitude e lonxitude. A Berenguela da Catedral de Santiago serviu como punto de partida. Atopou a latitude da Torre do Reloxo da Catedral por máis de 144 observacións astronómicas da estrela Polar, e por outras 200 de Orión e por alturas meridianas do Sol.

Para desenvolver a triangulación necesitaba unha base: unha liña recta e chá para determinar un dos lados dos triángulos. Coa trigonometría e as súas observacións podería facer o resto. O propio Fontán deixara escrito: “Ofrece Galicia muy pocas zonas llanas donde puedan medirse grandes bases” (ver [1]), polo que Fontán medirá dúas bases para cadansúa rede, que enlazará posteriormente.

En 1820 mediu preto de Santiago, na estrada de Santiago á A Coruña, a carón do cemiterio de Boisaca. Desde aí ata Formarís trazou unha base, para medila utilizou un anteollo meridiano portátil construído por Troughton (Londres) de dous pes de largo, un teodolito do mesmo autor, 4 perchas de madeira de pinavete, dous de catro metros e as outras dúas de tres e medio metros cada unha, dous barómetros e un metro de Fortín pertencente ao Gabinete de Física da Universidade de Santiago. No diario de operacións conservado pola Fundación Domingo Fontán obsérvase a preocupación de Fontán e Andrade en canto á dilatación das perchas que verificaban as súas medidas constantemente para determinar se eran iguais entre sí, empregando un comparador de palanca acodada (comparador de Lenoir) pois os cambios térmicos provocaban dilatacións das mesmas (ver [5]).

A distancia obtida (2744 varas castelás ou o que é o mesmo 2.291 metros) permitiulle arrincar as medicións. Durante o trienio liberal (1820–1823) realizou a parte occidental do mapa e en 1823 Fontán remataba o levantamento do oeste de Galicia, as actuais provincias de Pontevedra e A Coruña. Mais non foi ata 1826, tras o período absolutista de Fernando VII, que retomou a actividade pública e lle deu un segundo impulso ao mapa e neste mesmo ano lle foi encargada a división xudicial e municipal de Galicia.

En 1828 mide a base do Corgo na estrada de Lugo a Castela, de 5975 varas ou 4989 metros, desde a que construíu a parte oriental do mapa incluíndo as zonas próximas a ela de Asturias e O Bierzo.

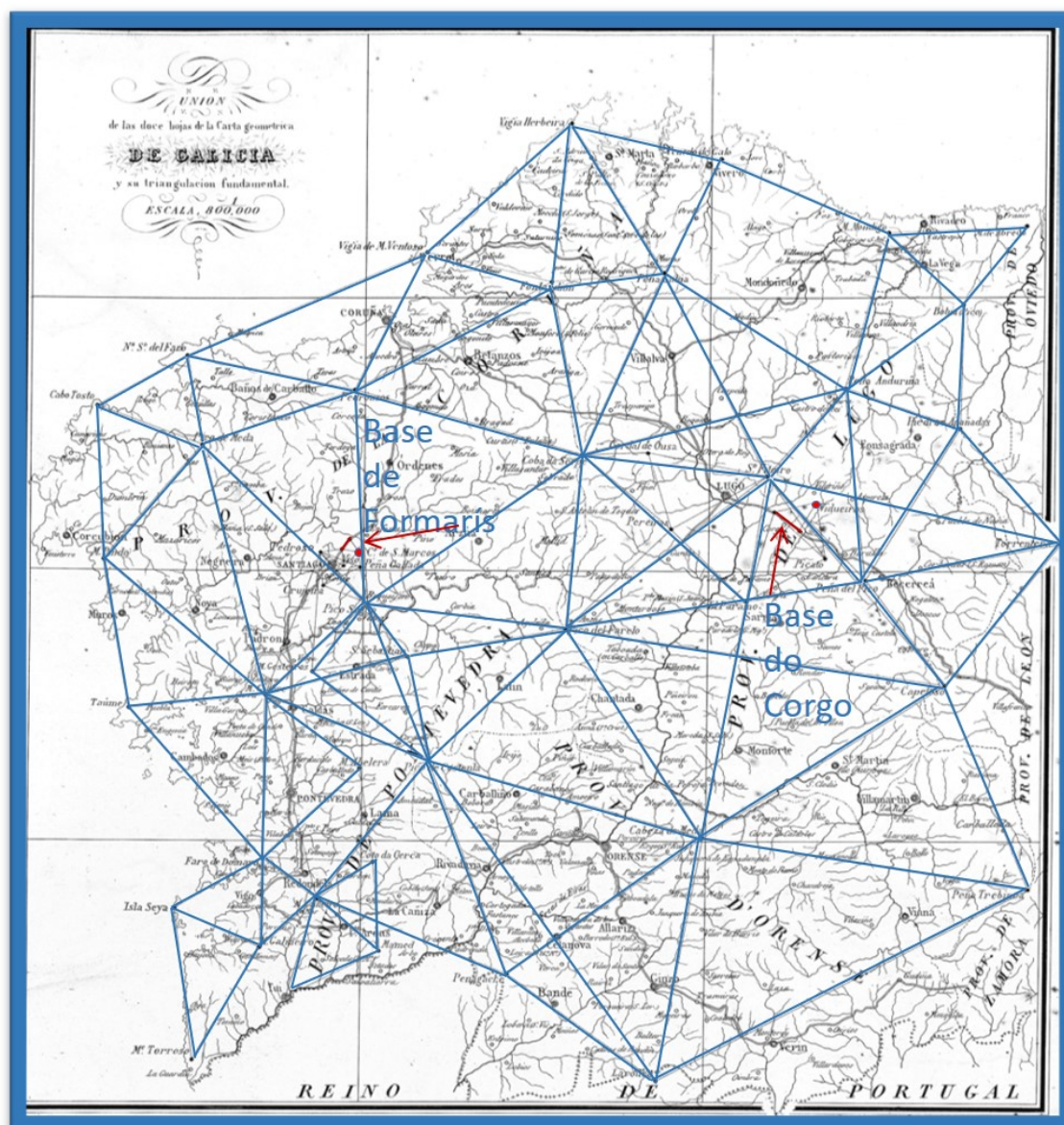


Figura 1.2: Triangulación fundamental identificando as bases de Formarís e O Corgo.

Fontán fixou as alturas (dadas en varas castelás) sobre o nivel do mar en Noia. Contou coa axuda do seu irmán Andrés, que realizaba en Noia observacións meteorolóxicas (presión atmosférica medida co barómetro e a temperatura a nivel do mar), ao mesmo tempo que Fontán realizaba as observacións nos puntos que quería medir as alturas (algunhas calculadas mediante trigonometría), para así despois facer as correccións e cálculos consecuentes. En cada estación, mediu e volveu medir varias veces cada un dos seus cálculos para así evitar erros e conseguir unha Carta próxima á perfección. As medicións facíaas en todas

as direccións, para poder empregalas como vértices de máis dun triángulo.

Fontán non subiu só aos picos máis altos senón que trazou triángulos máis pequenos que lle confirmasen os seus cálculos obtendo así unha precisión aínda maior. A dispersión da poboación e o poder relixioso foron grandes aliados á hora de trazar a Carta pois os campanarios das igrexas parroquiais eran case sempre o punto dende onde se avistaba toda a aldea, e dende o cal, o xeógrafo puido trazar unhas triangulacións de segundo e terceiro orde para situar no mapa cada un dos lugares polos que pasaba. Polo que a cantidade de datos, cálculos de distancias, de ángulos, condicións atmosféricas mediante aparellos como a alidada, barómetro e os anteollos, a rigorosidade das medicións plasmarían unha radiografía fiel do territorio galego (ver [3]).

En 1829 encargáronlle o trazado das futuras estradas que vertebrarían Galicia. En 1833 Fontán realizou as últimas medicións (nas montañas entre Lugo e Asturias) da parte oriental do mapa, a partir da base do Corgo (Lugo). En decembro de 1834 presentou o seu traballo ante a raíña rexenta María Cristina que acordou financiar o gravado da carta. Pero non foi ata 11 anos máis tarde, debido a innumerables atrancos físicos, políticos e económicos, que se realizou o gravado da carta en París. O mesmo Fontán desprazouse á cidade francesa para supervisar a edición co gravador Bouffard. Neste tempo Fontán puido perfeccionar e corrixir algúns erros de transcripción (nomes de entidade de poboación, altitudes, estacións xeodésicas entre outras), da versión de 1834. O gravado de 1845 conta con 12 follas en vez de 8 como tiña a versión de 1834, e conta con revisións incluídas polo propio Fontán (ver [1]).

O proceso de gravado culminou con mapas que contaban coas seguintes características: Marco con orla e rotulación de graos e cada 10' con subdivisións de 1'. Debuxados os meridianos e paralelos formando cuadrícula, relevo representado por normais, cotas altimétricas medidas en varas castelás e puntos da rede xeodésica. Planimetría con cidades representadas por pequenos círculos segundo importancia e con hexágonos as capitais e rede de comunicacións. A hidrografía representa a rede principal, con denominación dos ríos máis importantes. A costa aparece realzada con escollos, escarpados e praias con punteado. Abunda tamén a toponimia, rotulación en letra romanilla e itálica para o resto (ver [8]). A carta xeométrica non soamente representa o territorio galego senón tamén unha franxa de León, Asturias e Zamora, así como algunha porción de Portugal, consecuencia dun dos obxectivos de Fontán: o trazado das infraestruturas de acceso a Galicia. O mapa de Fontán serviría posteriormente como guía para escoller os mellores lugares para abrir camiños, salvando posibles accidentes xeográficos.

Capítulo 2

Obxectivo. Métodos e procedemento

O obxectivo deste traballo é a análise do cálculo das alturas e das presións nas estacións de Domingo Fontán con métodos actuais.

Formúlase nun principio a interpolación dos incrementos de presión atmosférica nas estacións da rede meteorolóxica de Galicia, tomando como estación de referencia a estación de Corón por ser a máis próxima ao nivel do mar, para así obter os incrementos de presión nas estacións de Fontán. Empregaremos distintos programas e modelos matemáticos que nos permitan aproximar a altitude nestas estacións, tomando como base a relación existente entre a variación da presión atmosférica e altitude.

Compararemos a altitude obtida cos valores rexistrados na cartografía actual e analizaremos os resultados e fiabilidade dos mesmos mediante a estimación de erros.

Os datos cos que imos traballar son valores reais de diferentes variables meteorolóxicas (presións atmosféricas, presións reducidas e alturas) recollidas por Meteogalicia en diferentes estacións meteorolóxicas do territorio galego.

O procedemento consistirá en obter datos das presións atmosféricas das estacións meteorolóxicas dispoñibles entre 2010 e 2019. Serán descargadas da base de datos de Meteogalicia mediante o programa estatístico *R* (ver [9]). Determinaremos e estudaremos variacións diarias promedio das estacións dispoñibles e faremos o mesmo cas presións reducidas.

Centrarémonos nos datos obtidos dende o 1/1/2010 ata o 31/12/2013 dun total de 46 estacións dispoñibles nas 4 provincias de Galicia.

A Coruña	Pontevedra	Lugo	Ourense
A Gándara	A Granxa	Borreiros	A Mezquita
Aldea Nova	Castrove	Castro R. de Lea	Alto do Rodicio
Arzúa	Corón	Campus Lugo	Gandarela
Cespón	Louredo	Courel	Lardeira
CIS Ferrol	Lourizán	Guitiriz-Mirador	Larouco
Fontecada	Meder	O Cebreiro	Ponte Boga
Mabegondo	Mouriscade	San Fiz	Serra do Eixe
Malpica	Ons	Ventosa	Verín-Vilamaior
Marco da Curra	Sanxenxo		Viana do Bolo
Melide	Serra do Faro		Xares
Muralla	Tremoedo		Xurés
Lesende	Vigo-Campus		
O Val			
Punta Candieira			
Río do Sol			

Cadro 2.1: Identificación das 46 estacións meteorolóxicas por provincias.

As alturas serán descargadas do Instituto Geográfico Nacional. Utilizaremos un *Modelo Dixital do Terreo* (MDT) de 5 metros de resolución (ver [10]). As presións serán cargadas no programa *ArcMap* de *ArcGIS* como unha capa vectorial de puntos e as alturas como un ráster en forma de mapa de superficies (MDT). Mediante interpolación das presións atmosféricas nas estacións meteorolóxicas co programa mencionado obteremos as presións nas de Fontán. Extraeremos os valores segundo puntos e determinaremos as alturas.

Faremos unha análise de tres mostras nas estacións meteorolóxicas para así ter un criterio do tipo de interpolación que debemos usar polas prestacións das mesmas. Primeiro collemos unha mostra de 29 estacións meteorolóxicas, situadas na metade sur de Galicia, e validaremos as 17 restantes, situadas na parte norte de Galicia. Procedemos a interpolar as presións atmosféricas en hectopascals nas estacións da mostra para obter as presións nas estacións que queremos validar.

Así comprobamos cal é o método de interpolación que máis se aproxima aos valores reais desas estacións. Probaremos con 3 tipos de interpolación: kriging, IDW (*Inverse Distance Weighting*) e spline.

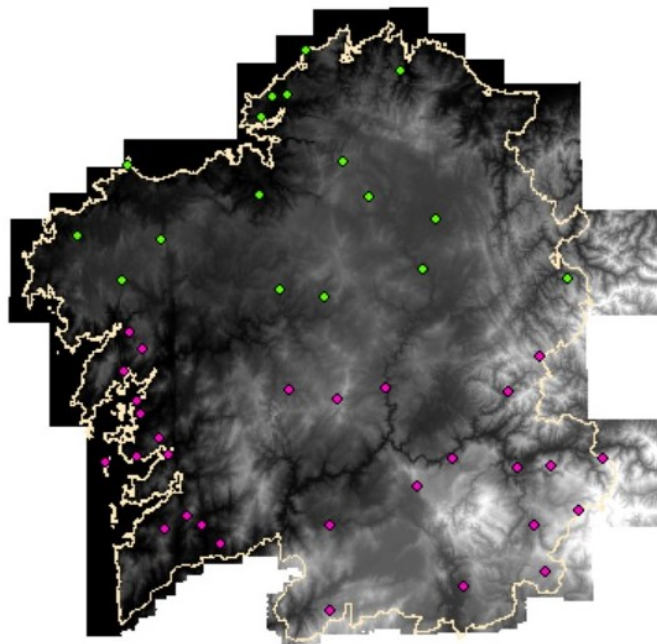
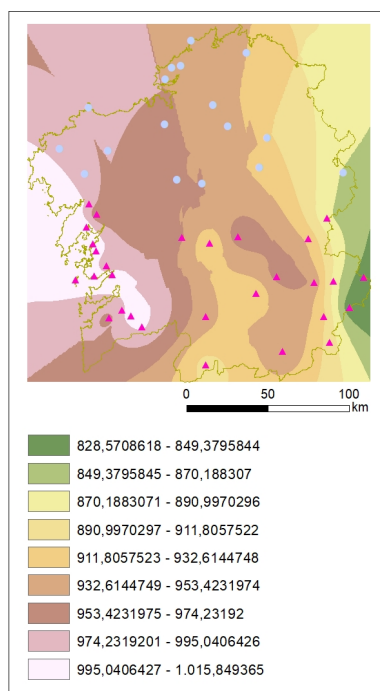
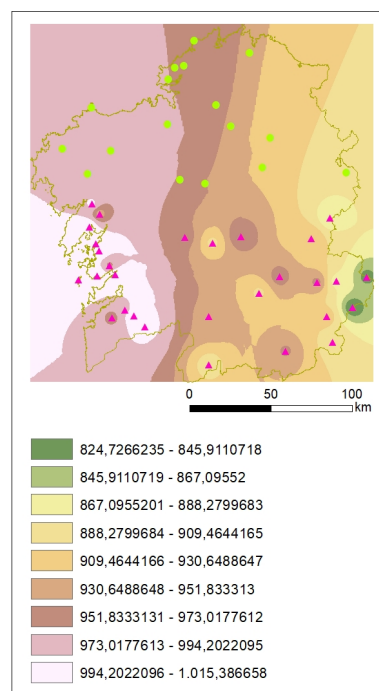


Figura 2.1: Mostra 1: estacións elixidas para a mostraxe (rosa) e estacións elixidas para validar (verde).

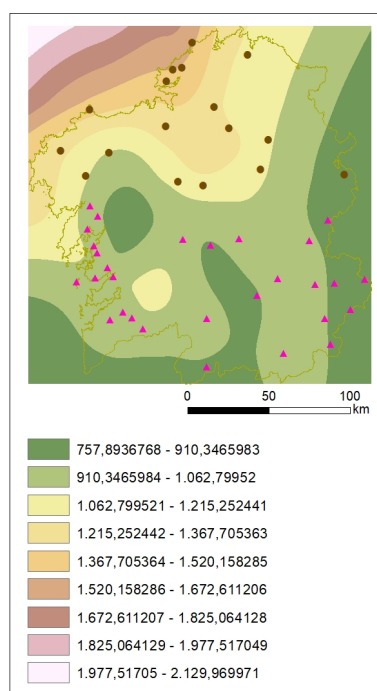
Interpolamos as presións atmosféricas en hectopascals nas estacións da mostraxe cos distintos tipos de interpolación tomando como extensión de procesamento a línea da Comunidade Autónoma descargada do Instituto Geográfico Nacional e obtendo así as presións nas estacións que queremos validar como se pode observar na Figura 2.2 e no Cadro 2.2.



(a) Kriging



(b) IDW



(c) Spline

Figura 2.2: Mostra 1: interpolación presiones atmosféricas.

Estación	Id Estación	UTMX	UTMY	Promedio Presión	Presión Kriging	Presión IDW	Presión Spline
A Gándara	10153	495367	4772823	969,5840846	990,989746	990,45105	1261,889648
Aldea Nova	10141	570034	4823648	985,3237256	946,047485	966,072083	1508,444458
Arzúa	10144	567344	4753590	974,6385595	960,654724	968,387695	1113,116821
Borreiros	10162	610447	4831788	1010,653891	930,312988	939,597412	1194,490967
Campus Lugo	10053	618455	4761028	969,132738	926,531128	925,807617	1095,997192
Castro R. de Lea	10146	623102	4779243	969,1438178	918,970276	922,207214	1093,414185
CIS Ferrol	10050	560458	4815665	1013,627921	948,8703	973,111572	1475,326172
Fontecada	10087	510740	4757338	975,0381146	984,467834	987,805115	1079,209351
Guitiriz-Mirador	10055	598825	4786697	938,9354298	935,148193	947,578979	1224,959229
Mabegondo	10045	559899	4787883	1006,744935	968,892822	979,374268	1287,895508
Malpica	10093	513260	4798141	998,108215	984,58905	985,625183	1440,595703
Marco da Curra	10046	589613	4799508	942,8038125	939,173828	954,139404	1252,889526
Melide	10089	583047	4751032	962,5081014	957,131775	955,503723	1152,200195
O Val	19004	564349	4822685	1009,949957	947,374329	967,166138	1521,991211
Punta Candieira	10092	576344	4839463	986,7003455	946,043762	964,678894	1541,882324
Río do Sol	10096	525148	4771432	954,7923648	977,043152	985,063171	1058,715088
Ventosa	10137	670044	4758037	913,5647799	867,977234	896,658569	854,648499

Cadro 2.2: Presións atmosféricas (hPa) nas estacións a validar da mostra 1.

Estación	Erro Relativo Kriging	Erro Relativo IDW	Erro Relativo Spline
A Gándara	0,0221	0,0215	0,3015
Aldea Nova	0,0399	0,0195	0,5309
Arzúa	0,0143	0,0064	0,1421
Borreiros	0,0795	0,0703	0,1819
Campus Lugo	0,0440	0,0447	0,1309
Castro R. de Lea	0,0518	0,0484	0,1282
CIS Ferrol	0,0639	0,0400	0,4555
Fontecada	0,0097	0,0131	0,1068
Guitiriz-Mirador	0,0040	0,0092	0,3046
Mabegondo	0,0376	0,0272	0,2793
Malpica	0,0135	0,0125	0,4433
Marco da Curra	0,0039	0,0120	0,3289
Melide	0,0056	0,0073	0,1971
O Val	0,0620	0,0424	0,5070
Punta Candieira	0,0412	0,0223	0,5627
Río do Sol	0,0233	0,0317	0,1088
Ventosa	0,0499	0,0185	0,0645

Cadro 2.3: Erros relativos nas estacións a validar da mostra 1.

No Cadro 2.2 temos unha táboa cos valores reais das presións nas estacións a validar (promedio presión das estacións) e temos os valores das presións atmosféricas obtidas mediante os distintos tipos de interpolación.

Observamos que a interpolación kriging aproxima mellor nas zonas de interior como son Guitiriz–Mirador, Marco da Curra, Melide, Río do Sol e a interpolación IDW aproxima mellor nas zonas de costa, como son A Gándara, Aldea Nova, CIS Ferrol, O Val, Punta Candieira.

Nalgunhas estacións como son A Gándara, Malpica, Campus Lugo, Castro R. de Lea, Fontecada, Melide podemos observar que a as presións obtidas cos métodos de interpolación kriging e IDW son moi semellantes.

Analogamente faremos o estudo con outra mostra escollendo 27 estacións da parte norte de Galicia elixidas para a mostraxe e veremos como afecta ás 19 estacións restantes situadas na parte sur de Galicia.

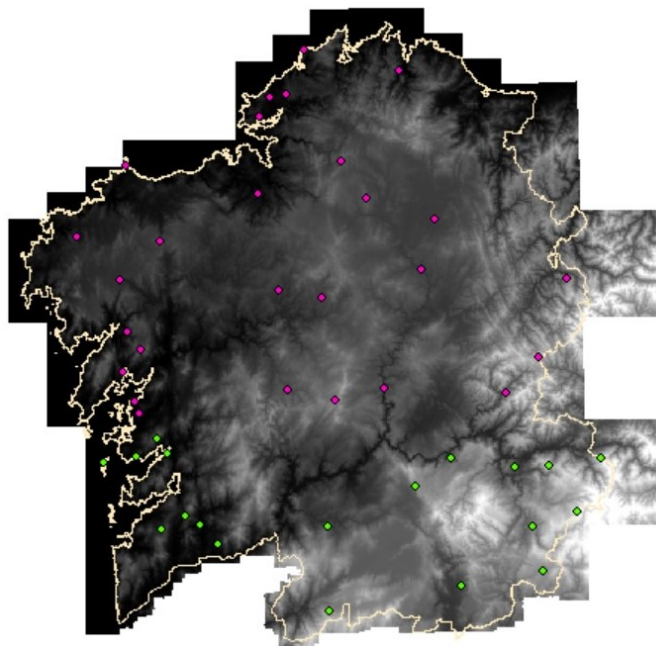
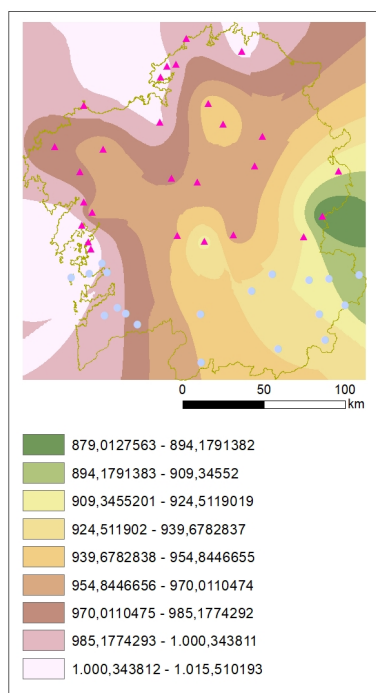
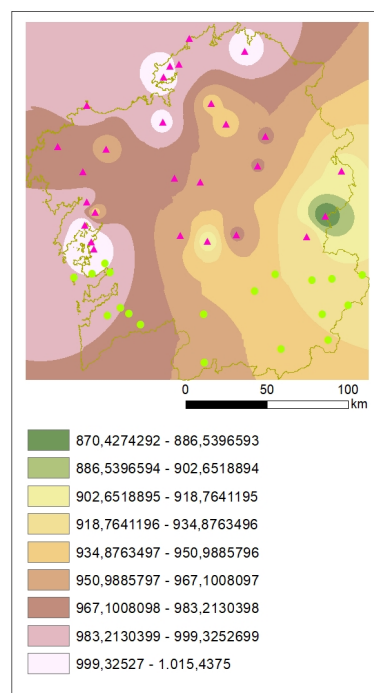


Figura 2.3: Mostra 2: estacións elixidas para a mostraxe (rosa) e estacións elixidas para validar (verde).

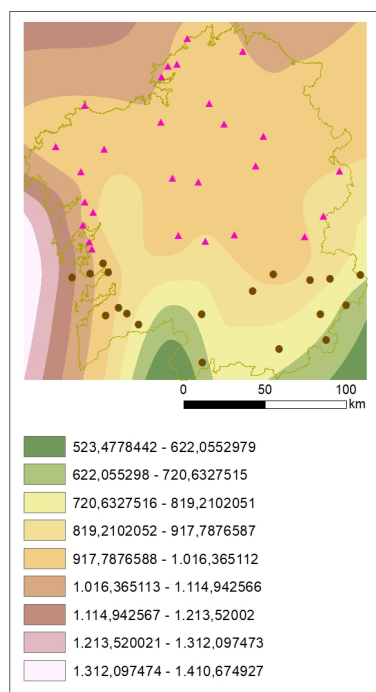
Procedemos a realizar os tres tipos de interpolación das presións atmosféricas nas estacións da mostraxe e obtemos as presións nas estacións a validar como vemos na Figura 2.4 e no Cadro 2.4.



(a) Kriging



(b) IDW



(c) Spline

Figura 2.4: Mostra 2: interpolación presiones atmosféricas.

Estación	Id Estación	UTMX	UTMY	Promedio Presión	Presión Kriging	Presión IDW	Presión Spline
A Granxa	19045	539233	4669916	1013,717654	984,387329	980,628174	863,850159
A Mezquita	19041	661544	4653556	902,2158923	927,803772	935,67572	701,668335
Alto do Rodicio	10057	616172	4683908	906,0718038	937,992615	942,424622	889,841492
Castrove	10067	524312	4700811	966,7577778	999,821899	1002,50061	970,699829
Gandarela	10112	585223	4669569	945,8317421	948,881165	954,22467	756,230164
Lardeira	10130	682499	4693814	838,8456856	901,356934	922,288818	750,221069
Larouco	19030	651818	4690513	957,8190909	918,450256	927,682983	880,175049
Louredo	19052	533920	4673440	989,7263646	988,274231	983,547363	907,978516
Lourizán	10064	527640	4695270	1010,776185	996,191895	996,309875	957,19635
Meder	19057	546073	4663088	1001,301967	979,952087	977,055054	787,401001
Ons	10126	505253	4692202	1004,000034	1008,570374	997,107178	1134,255859
Ponte Boga	19033	629071	4693999	964,2089752	936,59906	938,231689	945,250977
Sanxenxo	10129	516558	4694551	1012,813997	1004,440918	999,964966	1037,040771
Serra do Eixe	10115	664002	4691157	879,7617109	909,93811	924,28302	825,103149
Verín-Vilamaior	10058	632665	4648166	954,2807756	938,567261	943,976135	761,97998
Viana do Bolo	10116	657812	4669645	920,6587543	924,595215	933,107788	767,849243
Vigo-Campus	10161	525931	4668691	963,528087	993,804688	985,382141	962,960571
Xares	10138	673968	4675000	824,5869894	909,490173	928,176514	705,910522
Xurés	10119	585273	4639585	897,913389	954,481628	959,68335	679,046875

Cadro 2.4: Presións atmosféricas (hPa) nas estacións a validar da mostra 2.

Estación	Erro Relativo Kriging	Erro Relativo IDW	Erro Relativo Spline
A Granxa	0,0289	0,0326	0,1478
A Mezquita	0,0284	0,0371	0,2223
Alto do Rodicio	0,0352	0,0401	0,0179
Castrove	0,0342	0,0370	0,0041
Gandarela	0,0032	0,0089	0,2005
Lardeira	0,0745	0,0995	0,1057
Larouco	0,0411	0,0315	0,0811
Louredo	0,0015	0,0062	0,0826
Lourizán	0,0144	0,0143	0,0530
Meder	0,0213	0,0242	0,2136
Ons	0,0046	0,0069	0,1297
Ponte Boga	0,0286	0,0269	0,0197
Sanxenxo	0,0083	0,0127	0,0239
Serra do Eixe	0,0343	0,0506	0,0621
Verín-Vilamaior	0,0165	0,0108	0,2015
Viana do Bolo	0,0043	0,0135	0,1660
Vigo-Campus	0,0314	0,0227	0,0006
Xares	0,1030	0,1256	0,1439
Xurés	0,0630	0,0688	0,2438

Cadro 2.5: Erros relativos nas estacións a validar da mostra 2.

Como vemos, os resultados da interpolación kriging e da interpolación IDW son bastante semellantes (cun erro promedio do 3 % e do 3,5 % respectivamente) mentres que a interpolación spline distánciase considerablemente dos datos reais.

Consideramos unha terceira mostra intercalando estacións, así poderemos ver se o erro é menor nas estacións que están máis próximas, é dicir, analizaremos a dependencia da proximidade.

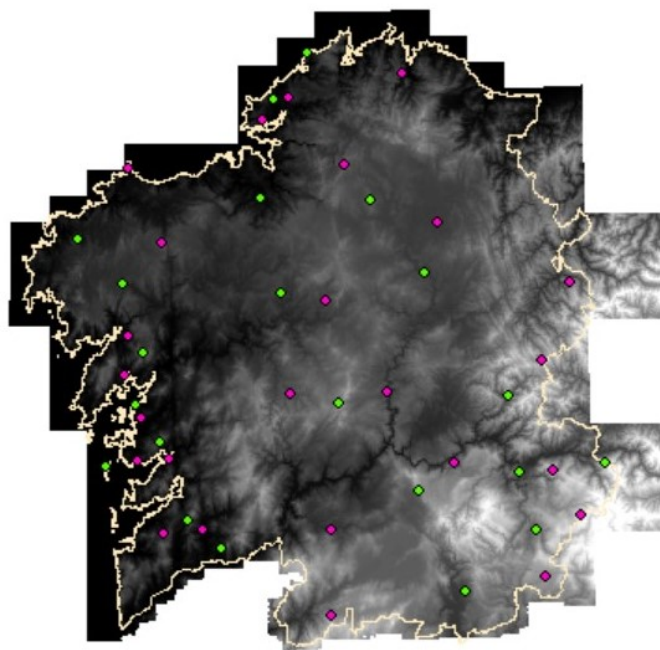
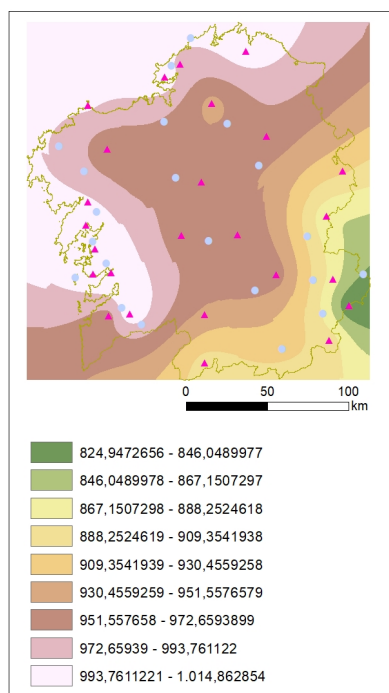
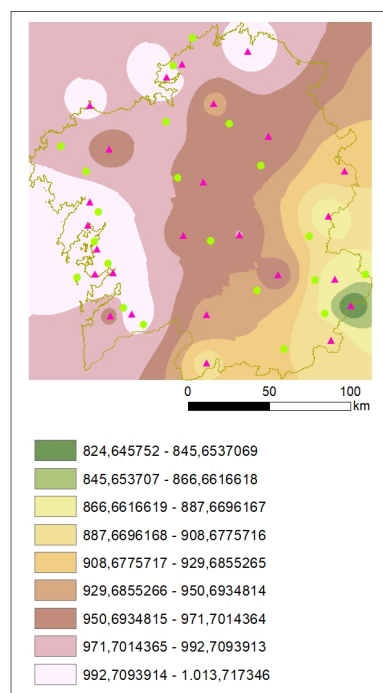


Figura 2.5: Mostra 3: estacións elixidas para a mostraxe (rosa) e estacións elixidas para validar (verde).

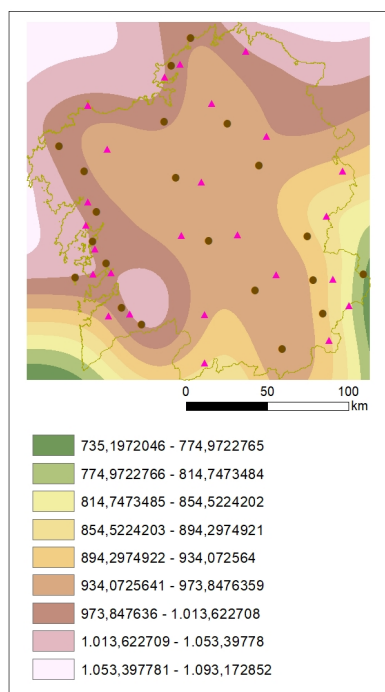
Analogamente, realizando os tres tipos de interpolación das presións atmosféricas nas estacións da mostraxe, obtemos as presións atmosféricas nas estacións a validar.



(a) Kriging



(b) IDW



(c) Spline

Figura 2.6: Mostra 3: interpolación presiones atmosféricas.

Estación	Id Estación	UTMX	UTMY	Promedio Presión	Presión Kriging	Presión IDW	Presión Spline
A Gándara	10153	495367	4772823	969,5840846	990,013184	986,696106	999,153442
Alto do Rodicio	10057	616172	4683908	906,0718038	956,761719	946,265442	962,783997
Arzúa	10144	567344	4753590	974,6385595	961,396301	969,305603	956,093445
Campus Lugo	10053	618455	4761028	969,132738	955,083923	958,036682	962,355774
Castrove	10067	524312	4700811	966,7577778	1011,325928	1008,76971	1009,129639
Corón	10085	516026	4714203	1015,6287	1010,903381	1009,43512	1010,655762
Courel	10102	648302	4717390	928,5988361	905,036865	901,269348	907,286499
Fontecada	10087	510740	4757338	975,0381146	981,146667	987,163818	982,582764
Guitiriz-Mirador	10055	598825	4786697	938,9354298	955,161621	959,245728	941,319153
Lardeira	10130	682499	4693814	838,8456856	844,139648	873,580078	779,085266
Larouco	19030	651818	4690513	957,8190909	905,894836	894,393921	926,860718
Louredo	19052	533920	4673440	989,7263646	998,755554	998,66394	1004,087952
Mabegondo	10045	559899	4787883	1006,744935	970,476807	980,389893	982,423096
Meder	19057	546073	4663088	1001,301967	989,336853	998,982666	1013,917603
Muralla	10052	518308	4732587	940,7763554	1000,94342	1002,44354	997,235046
O Val	19004	564349	4822685	1009,949957	998,348267	992,826843	1001,331116
Ons	10126	505253	4692202	1004,000034	1002,901489	1005,48138	1011,213806
Punta Candieira	10092	576344	4839463	986,7003455	998,529297	987,817322	982,447388
Serra do Faro	10122	587554	4714701	904,4694452	965,690247	965,23938	959,853882
Verín-Vilamaior	10058	632665	4648166	954,2807756	914,412476	912,169739	964,412048
Viana do Bolo	10116	657812	4669645	920,6587543	886,290833	880,708374	910,797424

Cadro 2.6: Presións atmosféricas (hPa) nas estacións a validar da mostra 3.

Estación	Erro Absoluto Kriging	Erro Absoluto IDW	Erro Absoluto Spline
A Gándara	20,4291	17,1120	29,5694
Alto do Rodicio	50,6899	40,1936	56,7122
Arzúa	13,2423	5,3330	18,5451
Campus Lugo	14,0488	11,0961	6,7770
Castrove	44,5682	42,0119	42,3719
Corón	4,7253	6,1936	4,9729
Courel	23,5620	27,3295	21,3123
Fontecada	6,1086	12,1257	7,5446
Guitiriz-Mirador	16,2262	20,3103	2,3837
Lardeira	5,2940	34,7344	59,7604
Larouco	51,9243	63,4252	30,9584
Louredo	9,0292	8,9376	14,3616
Mabegondo	36,2681	26,3550	24,3218
Meder	11,9651	2,3193	12,6156
Muralla	60,1671	61,6672	56,4587
O Val	11,6017	17,1231	8,6188
Ons	1,0985	1,4813	7,2138
Punta Candieira	11,8290	1,1170	4,2530
Serra do Faro	61,2208	60,7699	55,3844
Verín-Vilamaior	39,8683	42,1110	10,1313
Viana do Bolo	34,3679	39,9504	9,8613

Cadro 2.7: Erros absolutos nas estacións a validar da mostra 3.

Estación	Erro Relativo Kriging	Erro Relativo IDW	Erro Relativo Spline
A Gándara	0,0211	0,0176	0,0305
Alto do Rodicio	0,0559	0,0444	0,0626
Arzúa	0,0136	0,0055	0,0190
Campus Lugo	0,0145	0,0114	0,0070
Castrove	0,0461	0,0435	0,0438
Corón	0,0047	0,0061	0,0049
Courel	0,0254	0,0294	0,0230
Fontecada	0,0063	0,0124	0,0077
Guitiriz-Mirador	0,0173	0,0216	0,0025
Lardeira	0,0063	0,0414	0,0712
Larouco	0,0542	0,0662	0,0323
Louredo	0,0091	0,0090	0,0145
Mabegondo	0,0360	0,0262	0,0242
Meder	0,0119	0,0023	0,0126
Muralla	0,0640	0,0655	0,0600
O Val	0,0115	0,0170	0,0085
Ons	0,0011	0,0015	0,0072
Punta Candieira	0,0120	0,0011	0,0043
Serra do Faro	0,0677	0,0672	0,0612
Verín-Vilamaior	0,0418	0,0441	0,0106
Viana do Bolo	0,0373	0,0434	0,0107

Cadro 2.8: Erros relativos nas estacións a validar da mostra 3.

Neste caso obtemos coa interpolación kriging unhas aproximacións de presións atmosféricas cun erro promedio de 2,66 %, no caso do IDW de 2,75 % e co spline de 2,47 %. Nesta mostra, o método spline ten un erro pequeno, axusta ben nos puntos que están moi próximos ás estacións que estamos a interpolar, pero cando non hai esta proximidade os outros métodos aproximan mellor. O kriging, o máis empregado polos xeógrafos, é co que obtemos mellor precisión cos 3 tipos de mostra, polo que será o que usemos para os nosos obxectivos.

Agora procederemos a detallar un pouco máis estes métodos e ver que fórmulas hai detrás destas interpolacións seleccionadas dentro do programa *ArcMap*.

No contexto da xeografía, a interpolación espacial é: “un procedimientto que permite calcular el valor de una variable en una posición del espacio, conociendo los valores de esa variable en otras posiciones del espacio” (ver [11]).

Os distintos métodos de interpolación espacial clasifícanse en dúas grandes categorías: determinísticos e probabilísticos. Os métodos de interpolación determinísticos calculan un valor para cada cela da cuadrícula empregando unicamente propiedades físicas das mostras de elevación. O método determinístico máis comunmente empregado é a ponderación en función inversa da distancia ou IDW (*Inverse Distance Weighting*).

Este tipo de interpolación parte do suposto que as cousas que están máis próximas son parecidas, polo tanto teñen máis peso e influencia sobre o punto a estimar (ver [12]).

A fórmula que hai detrás deste tipo de interpolación é:

$$\hat{Z}(s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i),$$

onde $\hat{Z}(s)$ é o valor a predicir, N é o número total de observacións, $Z(s_i)$ son os valores medidos e λ_i son os pesos asignados a cada punto veciño, é dicir,

$$\lambda_i = \frac{d_i^{-p}}{\sum_{i=1}^N d_i^{-p}},$$

onde d é a distancia entre o lugar de predición (s) e o lugar da mostraxe (s_i) e p é un factor de redución de peso, cuxo valor encóntrase minimizando o erro cadrático medio ou erro de predición.

O método de interpolación spline que empregamos no programa *ArcMap* de *ArcGIS* estima valores usando unha función matemática que minimiza a curvatura xeral da superficie, é dicir, interpola unha superficie de ráster a partir de puntos utilizando unha técnica de spline de curvatura mínima bidimensional, o que resulta nunha superficie suave que pasa exactamente polos puntos de entrada. Empregaremos un spline regularizado que crea unha superficie suave que cambia gradualmente con valores que poden estar fora do rango de datos da mostra (ver [13]).

Interpolación kriging

Agora centrarémonos na interpolación kriging, que será a que usemos nos nosos cálculos por ser a máis empregada no contexto da xeografía como xa mencionamos. Esta interpolación pondera os valores medidos circundantes para calcular unha predición dunha ubicación sen medicións. Co método de kriging as ponderacións están baseadas non só na distancia entre os puntos medidos e a ubicación da predición, senón que tamén ten en conta a relación de dependencia entre as observacións (ver [13]).

Entre os obxectivos da xeoestatística figura a reconstrución dun fenómeno sobre a rexión de observación a partir dun conxunto finito de datos. Pódense definir os métodos kriging (ver [14]) como algoritmos de predición de mínimo erro en media cadrática que teñen en conta a correlación que existe entre as observacións. Supoñamos entón, que $\{Z(s)/s \in D\}$ é un proceso espacial ao que se lle impón algún tipo de estacionariedade.

Se dispoñemos das observacións $Z(s_1) \dots Z(s_n)$, trátase de construír un preditor de $Z(s)$, que se denotará por $\hat{Z}(s)$, tal que:

- Sexa insesgado, é dicir, $E[\hat{Z}(s)] = \mu(s)$, onde E denota a esperanza e μ a media.
- Minimice o erro cadrático medio (ECM) da predición $E[(\hat{Z}(s) - Z(s))^2]$, que ao termos un preditor insesgado, coincide coa varianza da predición.

Existen tres tipos de kriging linear para variables unidimensionais:

1. Kriging simple: aplícase cando a media do proceso $\mu(s)$ suponse coñecida.
2. Kriging ordinario: utilízase cando a media do proceso é descoñecida e constante $\mu(s) = \mu$.
3. Kriging universal: a media é descoñecida e non constante, pódese modelizar como combinación linear dun conxunto de funcións coñecidas.

Centrarémonos no kriging ordinario que é o empregado nos cálculos deste traballo. Para a aplicación deste método, supoñemos que o proceso $Z(s)$ admite unha descomposición da forma:

$$Z(s) = \mu + Y(s),$$

onde a media do proceso μ é descoñecida pero constante e onde $Y(s)$ é un proceso estacionario de segunda orde de media 0 e función de covarianza C que se define baixo estacionariedade de segunda orde como: $Cov(Z(s_i), Z(s_j)) = C(s_i - s_j)$.

Estudaremos o kriging ordinario baixo a hipótese de estacionariedade de segunda orde. Deséxase construír un preditor linear

$$\hat{Z}(s) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(s_i),$$

verificando:

- $E[\hat{Z}(s)] = \mu \Rightarrow \sum_i \lambda_i \mu = \mu \Rightarrow \sum_i \lambda_i = 1$.
- Os valores de λ_i obtéñense de modo que minimicen $E[(\hat{Z}(s) - Z(s))^2]$, con $\sum_i \lambda_i = 1$.
Ou, equivalentemente trátase de obter os valores λ_i e m_0 de modo que minimicen:

$$\begin{aligned} & E[(\hat{Z}(s) - Z(s))^2] + m_0 \left(\sum_i \lambda_i - 1 \right) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(s_i - s_j) - 2 \sum_i \lambda_i C(s_i - s) + C(0) + m_0 \left(\sum_i \lambda_i - 1 \right), \end{aligned}$$

onde m_0 é o multiplicador de Lagrange.

Derivando con respecto a λ_i e m_0 e igualando a 0, temos:

$$2 \sum_j \lambda_j C(s_i - s_j) - 2C(s_i - s) + m_0 = 0,$$

$$\sum_i \lambda_i - 1 = 0.$$

Tomando $m = m_0/2$, resulta:

$$\sum_j \lambda_j C(s_i - s_j) + m = C(s_i - s),$$

$$\sum_i \lambda_i = 1.$$

De forma matricial, as expresións anteriores resúmense como:

$$\begin{pmatrix} \sum & d \\ d^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B,$$

sendo :

$$\sum = \begin{pmatrix} C(0) & C(s_1 - s_2) & \cdots & C(s_1 - s_n) \\ C(s_2 - s_1) & C(0) & \cdots & C(s_2 - s_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C(s_n - s_1) & C(s_n - s_2) & \cdots & C(0) \end{pmatrix},$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} C(s_1 - s) \\ C(s_2 - s) \\ \cdots \\ C(s_n - s) \end{pmatrix}.$$

Obtense como solución $X = A^{-1}B$ e como varianza da predición:

$$\sigma_{KO}^2(s) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(s_i - s_j) - 2 \sum_i \lambda_i C(s_i - s) + C(0)$$

$$= \sum_i \lambda_i (C(s_i - s) - m) - 2 \sum_i \lambda_i C(s_i - s) + \sigma^2 = \sigma^2 - \sum_i \lambda_i C(s_i - s) - m = \sigma^2 - X^T B,$$

pois $\sigma^2 = C(0)$ e $\sum_j \lambda_j C(s_i - s_j) = C(s_i - s) - m$, como se desprende do sistema matricial.

Agora referiremos algunhas **consideracións e propiedades comúns dos métodos kriging lineais**:

- Os preditores kriging calcúlanse de modo que son os mellores preditores lineais insesgados (BLUP =best linear unbiased predictor).
- Os preditores kriging son interpoladores exactos, de modo que se $s = s_i$ para algún i , entón $\hat{Z}(s_i) = Z(s_i)$ e a varianza de predición é 0. A solución do sistema vén dada por $\lambda_i = 1$ e $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq i$.
- As hipóteses de estacionariedade permiten caracterizar de forma simple os pesos das ecuacións kriging que dependen da función de covarianza ou do variograma evaluados nos saltos.
- Os estimadores utilizados da función de covarianza ou do variograma teñen que ser válidos (definido positivo ou condicionalmente definido negativo).
- Os preditores kriging son preditores puntuais, é dicir, para cada posición $s \in D$ onde se desexe predicir deben calcularse os pesos λ_i específicos.

Vexamos algunhas **observacións** sobre os **métodos de kriging lineais**:

1. No kriging ordinario e universal verifícase que $\sum_i \lambda_i = 1$ (no kriging simple non ten por qué verificarse esta igualdade).
2. En xeral, a función de covarianza ou o variograma son funcións descoñecidas e, polo tanto deben estimarse para a súa aplicación aos sistemas de ecuacións kriging.

Na **selección do entorno** compre mencionar que unha práctica frecuente na aplicación dos métodos kriging, no caso de ter un número considerable de observacións, é a elección dos datos máis próximos á posición na que se quere obter a predición, en lugar de considerar todas as observacións posibles, xa que simplifica o problema obxecto de estudo e utilízanse estimacións máis eficientes do variograma, ao estar calculadas sobre distancias pequenas.

- Considerar os datos máis próximos á posición de predición.
- Utilizar os datos que se atopen dentro dun raio de búsqueda en torno á posición considerada.
- Tamén se pode dividir a rexión de observación en bloques e se poden considerar os datos correspondentes aos bloques máis próximos á posición de predición.

Á vista destas propiedades, os resultados obtidos por interpolación kriging nas mostras 1 e 2, onde as estacións están máis afastadas, proporcionan un erro promedio menor que cos outros métodos, que teñen unha maior dependencia da distancia, polo feito de que o método kriging ten en conta a relación de dependencia dos datos entre sí. Na mostra 3 ademais da autocorrelación, presente tamén nas mostras 1 e 2, os datos están máis próximos o que mellora a precisión dos tres métodos empregados, como xa foi analizado cuantitativamente na presentación dos resultados.

Polo tanto o feito de que o kriging non teña só en conta a distancia entre as observacións senón tamén a relación de dependencia entre os valores medidos fai que sexa o método máis competitivo e o que empregaremos no capítulo seguinte para aproximar as alturas nas estacións de Fontán.

Capítulo 3

Resultados

Como primeira hipótese deste traballo consideramos a fórmula

$$\Delta P = -\rho g \Delta H,$$

onde ρ é a densidade do aire ($\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$) e g é a aceleración da gravidade ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$).

O obxectivo será calcular unha aproximación da altitude nas estacións de Fontán. Para iso consideramos os ΔP e ΔH calculados como a diferenza entre os datos medidos na estación de referencia (Corón) e na estación a considerar, é dicir, $\Delta P = P_{Est} - P_{Cor}$ e $\Delta H = H_{Est} - H_{Cor}$. Elixiuse a estación de Corón como estación de referencia pois é a que está máis próxima ao nivel do mar (0,428 m) e polo tanto, a de maior presión atmosférica (1015,6287 hPa).

Por outra banda, temos relacionados os puntos do mapa de Fontán con altitudes e a súa correspondencia na actualidade. O máis frecuente é que a altitude figure nunha estación, frecuentemente un cumio, aínda que tamén hai altitudes en poboacións, pontes e outras posicións.

O que se fixo foi localizar os puntos con altitude no mapa de Fontán e despois buscalos no *Mapa Topográfico Nacional (MTN)* xa a escala 1:25000, 1:50000 ou noutras escalas co apoio dun xeovisor.

O primeiro que facemos é unha análise dos datos que temos nas estacións meteorolóxicas, veremos como evoluciona a altitude (m) en función da presión atmosférica en pascais (Pa).

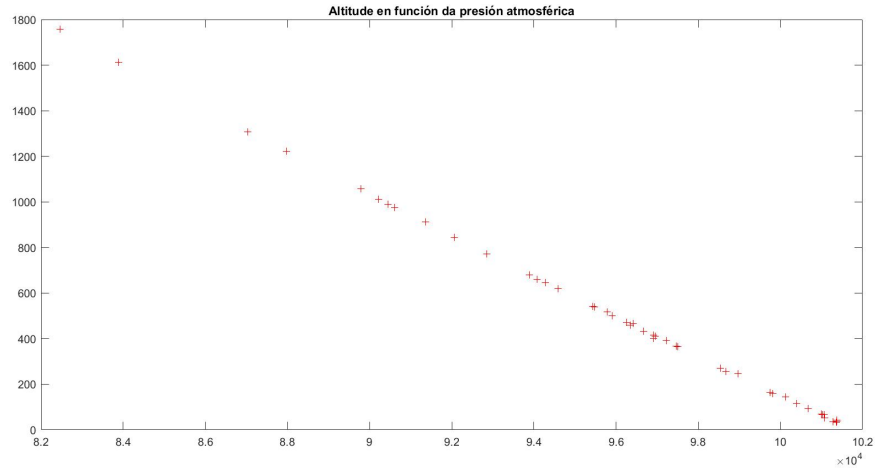


Figura 3.1: Altitude en función da presión atmosférica nas estacións meteorolóxicas enumeradas na Figura 2.1.

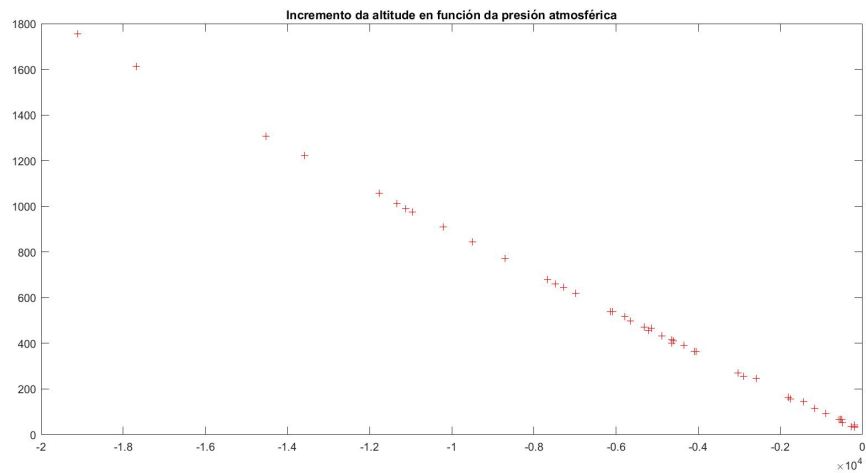


Figura 3.2: Incremento da altitude en función do incremento da presión atmosférica nas estacións meteorolóxicas.

Podemos observar que a medida que aumenta a presión atmosférica diminúe a altura, hai unha dependencia practicamente linear. Facemos un axuste linear por mínimos cadrados para obter unha aproximación de $-\frac{1}{\rho g}$. Utilizouse o comando “*polyfit*” en *MATLAB* que permite obter o axuste por polinomios de grao 1 e 2.

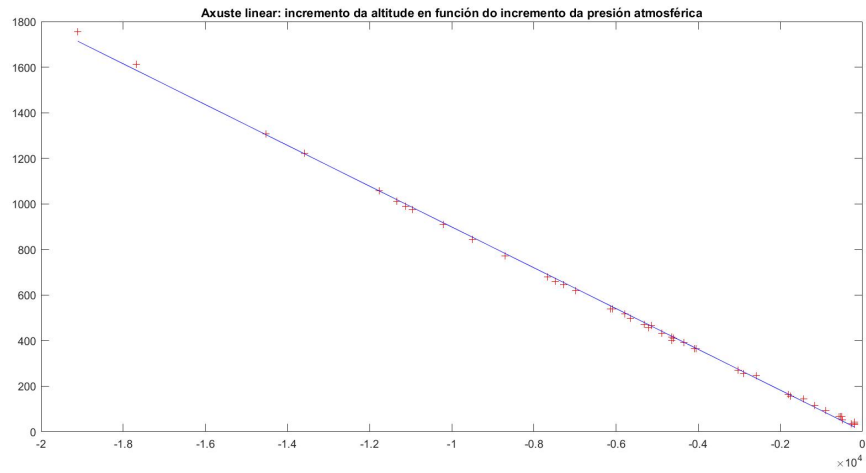


Figura 3.3: Axuste linear: incremento da altitude en función do incremento da presión atmosférica.

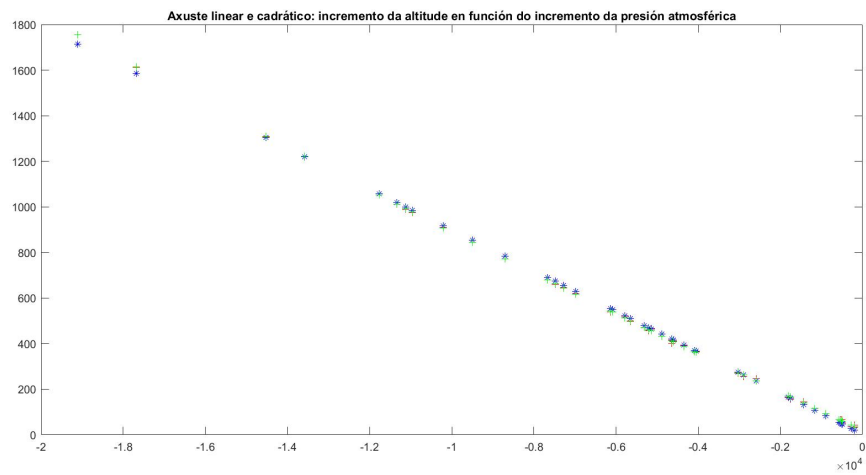


Figura 3.4: Axuste linear e cadrático: incremento da altitude en función do incremento da presión atmosférica.

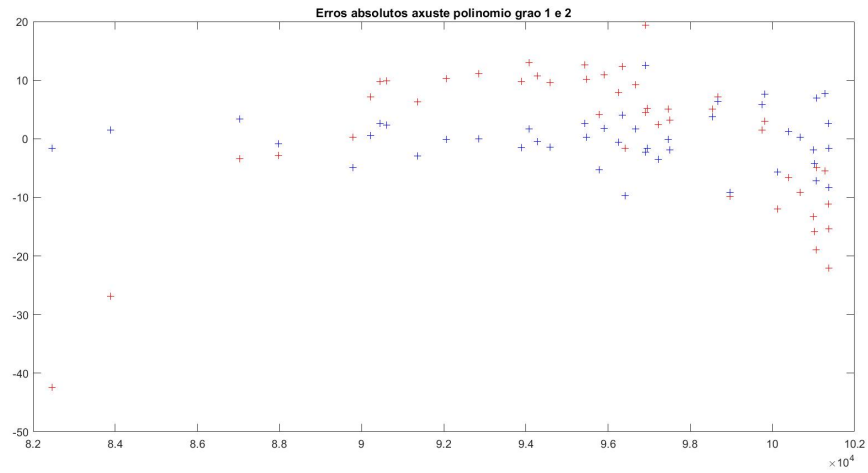


Figura 3.5: Erros absolutos axuste polinomio grao 1 (vermello) e grao 2 (azul).

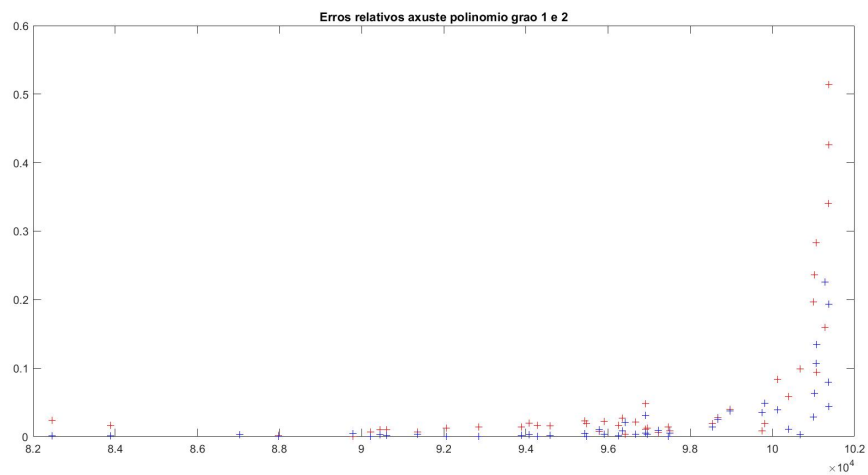


Figura 3.6: Erros relativos axuste polinomio grao 1 (vermello) e grao 2 (azul).

Facer un axuste cadrático non supón mellorías. Vemos que hai unha correlación entre os incrementos de altura e presión atmosférica, sen embargo as presións reducidas non correlacionan nin linear nin cadraticamente, non hai relación entre os incrementos de altura e os incrementos de presión reducida.

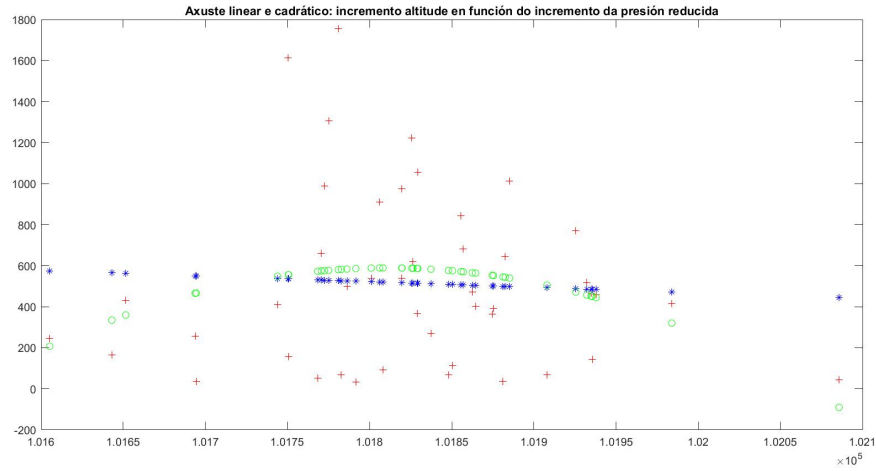


Figura 3.7: Axuste linear e cadrático: incremento da altitude en función do incremento da presión reducida.

Polo tanto usaremos a presión atmosférica que é a que mediu e usou Fontán.

Obtemos unha aproximación da pendente $-\frac{1}{\rho g} \approx -0,0895 \Rightarrow \rho g \approx 11,1732$ co cal obtemos unha correlación boa entre altitude e presión.

Facemos unha análise no programa estatístico *R*, tomando como variable resposta ou dependente o $\Delta H = H_{Est} - H_{Cor}$ e como variable explicativa ou independente $\Delta P = P_{Est} - P_{Cor}$.

Representamos o diagrama de dispersión coa recta axustada e chegamos de novo a que esta relación é linear.

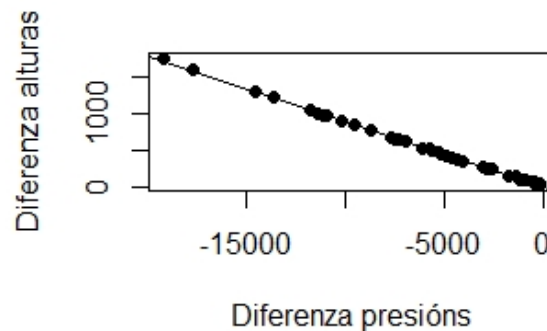


Figura 3.8: Diagrama de dispersión coa recta axustada.

Posteriormente procedemos a realizar o axuste do modelo empregando a función “*lm*” de *R* que nos dá a altura en función da presión atmosférica e sacamos a estimación dos coeficientes, que coinciden cos obtidos en *MATLAB*.

```
> modelo_AP<-lm(DifAlt~DifPres)
> coef(modelo_AP)
(Intercept)      DifPres
 3.59529995 -0.08950822
```

Figura 3.9: Axuste do modelo e coeficientes do axuste.

Obtemos unha aproximación da pendente de $-0,0895$ e un intercepto de $3,5952$. Polo tanto, o modelo axustado sería:

$$\hat{Y} = a + bX \Rightarrow \hat{Y} = 3,5952 - 0,0895X,$$

onde X é a diferenza de presións e \hat{Y} é a diferenza de alturas que se predí para un determinado valor de diferenzas de presións. Entón, por cada unidade que se incrementa a diferenza de presións, a diferenza de alturas redúcese $0,0895$ unidades.

Facemos un resumo dos datos do modelo e obtemos:

```
> summary(modelo_AP)

Call:
lm(formula = DifAlt ~ DifPres)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-19.352  -9.781  -4.121   6.652  42.395

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.5952999  2.9515585   1.218    0.23
DifPres      -0.0895082  0.0003985 -224.626 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 12.61 on 43 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9991,    Adjusted R-squared:  0.9991
F-statistic: 5.046e+04 on 1 and 43 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figura 3.10: Resumo do modelo.

O máis destacable é o valor de R^2 , coeficiente de determinación, que é de 0,9991, o cal quere dicir que a diferenza de presións explica un 99,91 % da diferenza de alturas. Esta afirmación é correcta se o modelo axustado cumpre as hipóteses baixo as cales é posible facer inferencia: linealidade, homocedasticidade, normalidade dos erros e independencia dos valores cos que se obtén a regresión.

Mediante o comando *confint* obtemos os intervalos de confianza para os parámetros do modelo. No caso do intercepto, o intervalo de confianza ao 95 % é $(-2,3223, 9,1393)$.

Este intervalo contén ao verdadeiro valor do intercepto da recta cunha probabilidade do 95 %. No caso da pendente, o intervalo de confianza ao 95 % para este parámetro é de $(-0,0903, -0,0887)$. É dicir, este intervalo contén o verdadeiro valor da pendente cunha probabilidade do 95 %.

Facemos unha análise gráfica dos residuos para ver se podemos afirmar que a diferenza de presións explican un 99,91 % da variabilidade da diferenza de alturas.

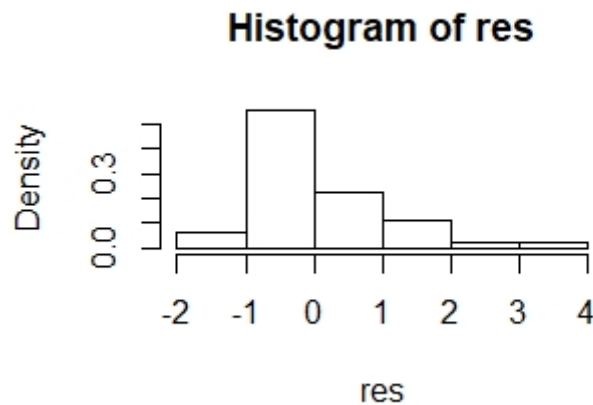


Figura 3.11: Histograma residuos estandarizados.

O test *Shapiro–Wilks* formula a hipótese nula que unha mostra provén dunha distribución normal. Obtemos un p-valor de 0,0002943, un valor considerablemente pequeno, moi inferior a un nivel de significación do 5 %, polo que rexeitaríamos a hipótese nula de que a distribución é normal.

Representamos os residuos na Figura 3.11 e vemos que hai dúas observacións que son influíntes, Lardeira ($\Delta P = -17678,3014$, $\Delta H = 1612,8230$) e Xares ($\Delta P = -19104,1711$, $\Delta H = 1755,9710$).

Quitamos estas dúas observacións influíntes que estan a modificar o resultado do axuste e vemos que o test *Shapiro–Wilks* dá un p-valor de 0,08171, polo que poderíamos aceptar a hipótese de normalidade a un nivel de significación do 5 % pero a un nivel de significación do 10 % ou do 15 % o test rexeita a hipótese de normalidade.

Representamos o histograma dos residuos sen estas observacións influíntes (ver Figura 3.12) e observamos que deixa de ser tan asimétrico.

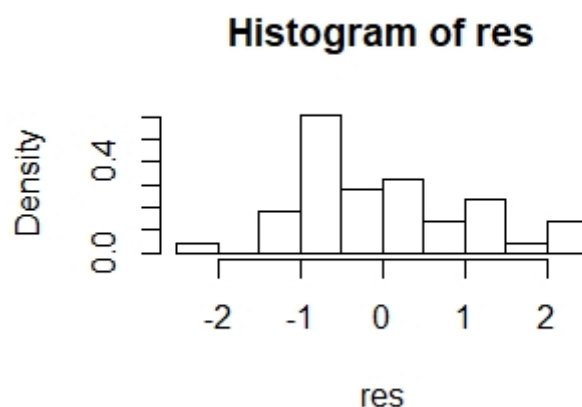


Figura 3.12: Histograma residuos estandarizados sen Lardeira e Xares que son observacións influíntes.

Agora unha vez que analizamos os datos, a hipótese inicial do traballo é aproximar as altitudes nas estacións de Fontán a partir das presións atmosféricas nas estacións meteorolóxicas.

Temos os incrementos de presión nas 45 estacións meteorolóxicas, tomando como referencia a estación de Corón como xa dixemos, e mediante interpolación en *ArcMap* obtemos os incrementos de presión nas estacións de Fontán.

Consistirá en obter unha aproximación do incremento da altura nas estacións de Fontán a partir da pendente $-\frac{1}{\rho g}$ e ΔP , é dicir:

$$\Delta H = H_{Est} - H_{Cor} \approx -\frac{1}{\rho g} \Delta P. \quad (3.1)$$

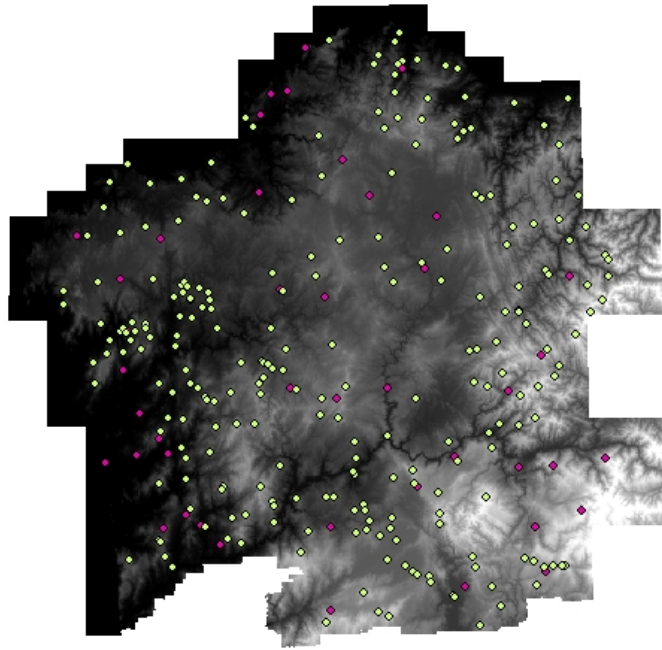


Figura 3.13: Estacións meteorolóxicas (rosa) e estacións de Fontán (verde).

Xa obtivemos por regresión que o valor de $-\frac{1}{\rho g}$ pode aproximarse por $-0,0895$.

Agora calculamos mediante o kriging ordinario o valor dos incrementos de presión en pascals nas estacións de Fontán, tomando como extensión do procesamento o *Modelo Dixital do Terreo*.

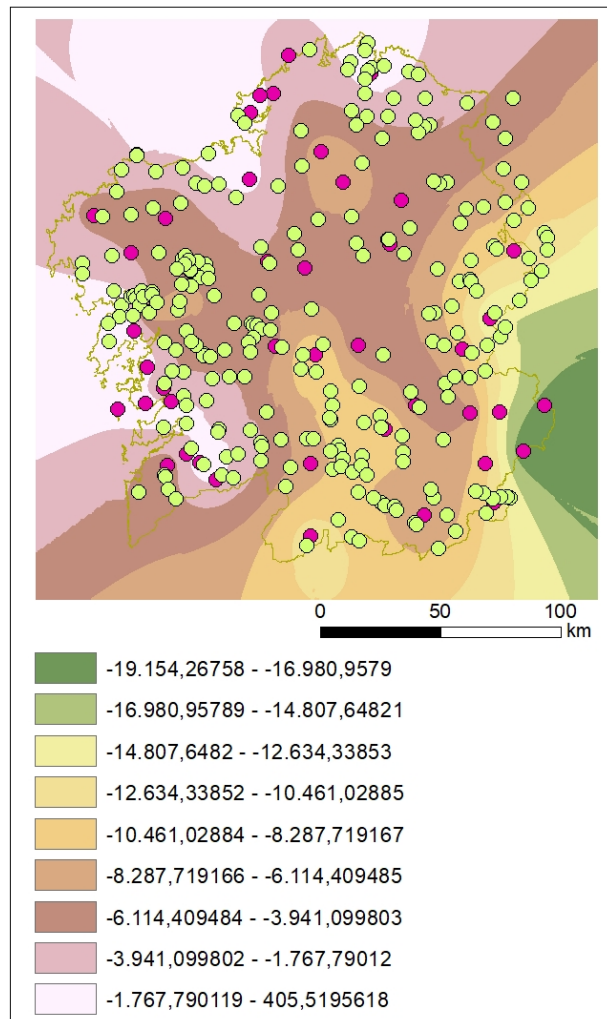


Figura 3.14: Incrementos de presión nas estacións de Fontán mediante kriging ordinario.

Ordeando os erros de menor a maior vemos no Cadro 3.1 que nas estacións de Fontán próximas ás nosas estacións meteorolóxicas coa hipótese principal, despexando na ecuación (3.1), obtemos unha aproximación de altitude aceptable.

Estación Fontán	Coord X	Coord Y	Incremento Presión E.F	Altura MDT	Altura MTN	Incremento Altura E.F	Aproximación Altura E.F	Erro Absoluto MTN	Erro Relativo MTN
Penedo das Portas	606848,62	4672705,51	-9293,012695	826,869995	833	831,7246362	832,1526362	0,8474	0,0010
Silleda	561656,44	4727355,70	-5491,123047	490,881989	491	491,4555127	491,8835127	0,8835	0,0018
Meira	638753,08	4785874,52	-5377,028809	482,977997	483	481,2440784	481,6720784	1,3279	0,0027
Canda	667160,54	4655656,29	-12964,17578	1155,293945	1156	1160,293732	1160,721732	4,7217	0,0041
(Sen nome)	673203,08	4786674,51	-7656,137695	690,815002	689	685,2243237	685,6523237	3,3477	0,0049
S. Bartolome	498925,17	4772499,14	-4548,713379	404,237	405	407,1098474	407,5378474	2,5378	0,0063
Pico de Bubela	519813,92	4775934,95	-5131,086426	450,713989	451	459,2322351	459,6602351	8,6602	0,0192
Arzúa	568234,63	4752982,59	-4184,510254	383,05899	383	374,5136677	374,9416677	8,0583	0,0210
Fuente	636426,47	4787160,13	-5211,304199	456,697998	456	466,4117258	466,8397258	10,8397	0,0238
Codeso	519604,93	4740002,85	-4822,489746	443,065002	443	431,6128323	432,0408323	10,9592	0,0247
(Sen nome)	614881,86	4684742,30	-10641,44043	981,882996	981	952,4089185	952,8369185	28,1631	0,0287
M. Pedroso	535337,68	4750262,90	-5633,875977	476,891998	486	504,2318999	504,6598999	18,6599	0,0384
Villavieja	664272,67	4655846,31	-12142,875	1045,954956	1046	1086,787313	1087,215313	41,2153	0,0394
Portilla de la Canda	668456,59	4655487,81	-13497,16309	1258,968018	1259	1207,996096	1208,424096	50,5759	0,0402
(Sen nome)	533380,81	4756239,53	-5581,756348	515,825989	521	499,5671931	499,9951931	21,0048	0,0403
M. del Treito	518220,34	4732524,66	-7266,047852	675,633972	679	650,3112828	650,7392828	28,2607	0,0416
(Sen nome)	532175,12	4754889,95	-5609,489746	529,038025	530	502,0493323	502,4773323	27,5227	0,0519
Pereiro	661200,97	4655067,48	-11301,31641	953,320984	953	1011,467818	1011,895818	58,8958	0,0618
(Sen nome)	504820,15	4782867,67	-3932,741943	371,15799	376	351,9804039	352,4084039	23,5916	0,0627
Lugo Catedral	617464,21	4762825,36	-4693,845703	449,871002	450	420,0991904	420,5271904	29,4728	0,0655
Villa de Rey	616214,08	4652275,19	-7811,870605	656,377991	656	699,1624191	699,5904191	43,5904	0,0664

Cadro 3.1: Aproximación das alturas nas estacións de Fontán resultado de interpolar con kriging os incrementos de presión nas estacións meteorolóxicas.

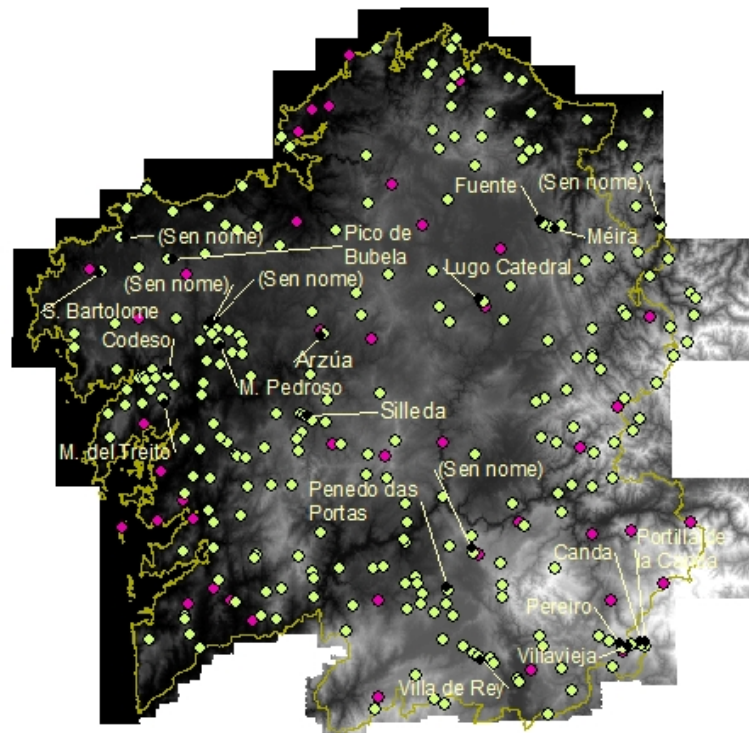


Figura 3.15: Estacións de Fontán etiquetadas (verde) que teñen un erro menor ou igual que 6 %.

No Cadro 3.1 temos unha táboa coas coordenadas das estacións de Fontán na que mostramos os incrementos de presión, resultado de facer interpolación kriging nas estacións meteorolóxicas, na 4ª e 5ª columna temos as alturas nestas estacións calculadas co *Modelo Dixital do Terreo (MDT)* no *ArcGIS* e as alturas que figuran no *Mapa Topográfico Nacional (MTN)*, a aproximación da altura e os erros con respecto a altura do *MTN*. Observamos que teñen un erro relativamente pequeno, ata un 6 %.

Na Figura 3.15 temos sinaladas estas estacións de Fontán no mapa e observamos que moitas destas teñen unha estación meteorolóxica considerablemente cerca.

A continuación, na Figura 3.16 e na Figura 3.17, facemos un zoom para ver mellor a proximidade dalgunhas das estacións.

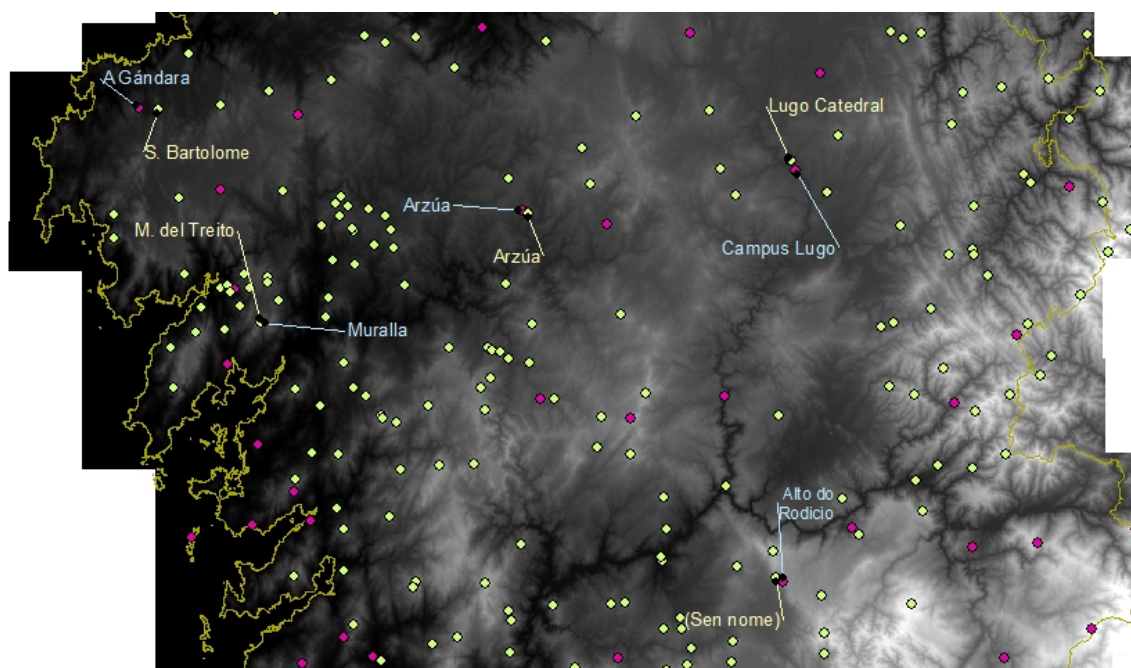


Figura 3.16: Estacións de Fontán (verde) moi próximas ás estacións meteorolóxicas (rosa).

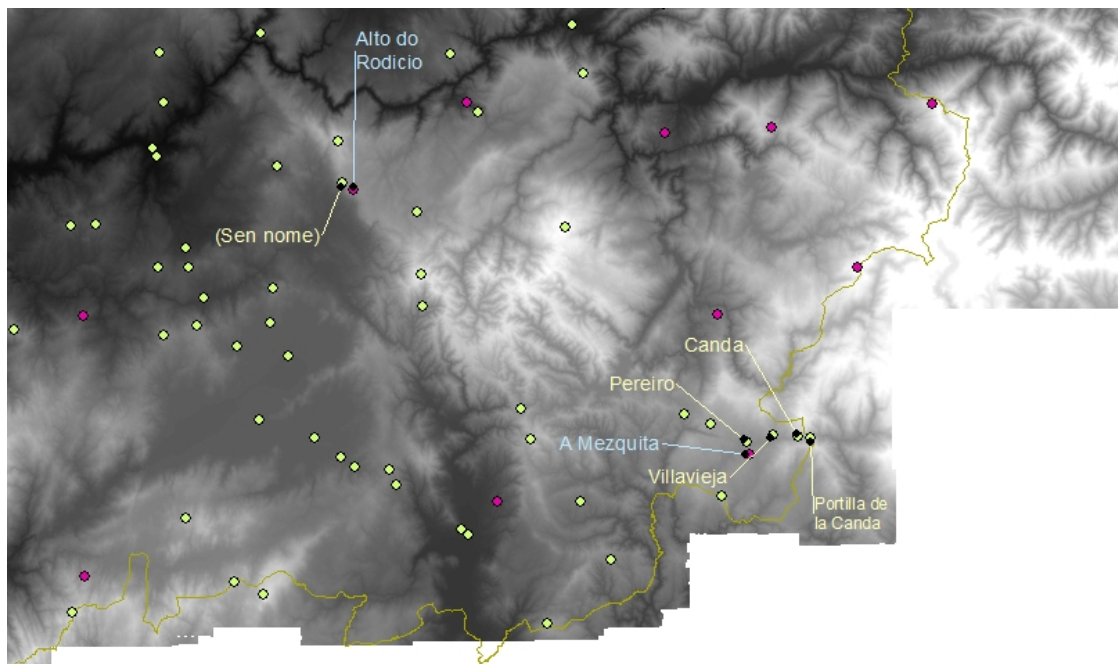


Figura 3.17: Estacións de Fontán próximas a A Mezquita.

En Arzúa, na estación de Fontán obtemos un $\Delta P = -4184,510254 \text{ Pa}$ moi próximo ao de Arzúa (estación meteorolóxica), que é de $-4099,10405 \text{ Pa}$, polo tanto obtemos unha aproximación da altura de $374,9417 \text{ m}$ que comparando coa altitude do MTN (383 m) danos un erro do 2%. S.Bartolomé que está moi próximo a A Gándara danos unha aproximación da altura de $407,5378 \text{ m}$ cun erro absoluto de $2,5378 \text{ m}$, o que equivale a un erro do 0,6266 %, sen embargo é a estación que máis erro lle da a Fontán (34,63%).

Canda, próxima a A Mezquita danos unha aproximación de altura cun erro absoluto de $4,7217 \text{ m}$, o que equivale a un erro relativo do 0,41 %. Podemos dicir que a hipótese inicial é bastante boa para aproximar alturas nas estacións de Fontán que están suficientemente próximas ás estacións meteorolóxicas que estamos a considerar. Nestas estacións obtemos resultados bastante aproximados.

Aínda que globalmente esta hipótese non é resultante pois hai estacións de Fontán na que cometemos un erro desorbitado como se ve na seguinte táboa.

Estación Fontán	Coord X	Coord Y	Incremento Presión E.F	Altura MDT	Altura MTN	Incremento Altura E.F	Aproximación Altura E.F	Erro Absoluto MTN	Erro Relativo MTN
Castro Mayor	554466,98	4780361,08	-2122,790771	475,290009	477	189,989774	190,417774	286,5822	0,6008
Pico de Tresmugeres	630259,74	4831696,06	-2109,522705	475,160004	477	188,8022821	189,2302821	287,7697	0,6033
Pico de la Togiza	629049,62	4812276,19	-3657,498047	828,530029	834	327,3460752	327,7740752	506,2259	0,6070
Bazal	605514,11	4701907,54	-7858,419434	439,018005	437	703,3285393	703,7565393	266,7565	0,6104
Monticaños	542766,56	4798602,56	-1054,448486	242,768997	244	94,3731395	94,8011395	149,1989	0,6115
Nª Sra. de la Peneda	533744,29	4686146,02	-1380,468628	325,199005	329	123,5519422	123,9799422	205,0201	0,6232
Vigia Herbeira	584909,77	4841703,06	-2463,246094	612,724976	611	220,4605254	220,8885254	390,1115	0,6385
Mte. del Seijo	551809,07	4705637,44	-4068,132324	1014,797	1014	364,097843	364,525843	649,4742	0,6405
S. Fiz	553431,12	4663685,39	-2648,777344	669,585022	671	237,0655723	237,4935723	433,5064	0,6461
(Sen nome)	669458,28	4821493,59	-4669,81543	251,658005	254	417,948481	418,376481	164,3765	0,6472
Coriscado	608937,28	4814158,78	-3641,361572	925,38501	929	325,9018607	326,3298607	602,6701	0,6487
Paraños	550470,92	4672329,01	-1509,144287	391,643005	392	135,0684137	135,4964137	256,5036	0,6543
Ms. del Jalo	547406,19	4785941,05	-1909,632813	519,570984	521	170,9121368	171,3401368	349,6599	0,6711
Ms. De Pedamua	542260,77	4696028,99	-2329,447021	646,862	646	208,4855084	208,9135084	437,0865	0,6766
Cabeza de Manzaneda	640386,85	4679706,53	-6363,374023	1778,60095	1781	569,5219751	569,9499751	1211,0500	0,6800
Sra. de Sabucedo	608015,89	4823419,99	-2268,197021	646,955017	648	203,0036334	203,4316334	444,5684	0,6861
S. Lois	507008,41	4735479,59	-1256,841553	361,178009	363	112,487319	112,915319	250,0847	0,6889
Ms de Cabaleiros	626146,63	4832637,44	-1728,658325	502,937012	504	154,7149201	155,1429201	348,8571	0,6922
Pico de Cuadramón	617394,35	4814091,79	-3547,380859	1055,33606	1055	317,4905869	317,9185869	737,0814	0,6987
Coriscada	600700,88	4833471,04	-1714,222778	517,16803	520	153,4229386	153,8509386	366,1491	0,7041
Penido Novo	619918,62	4821421,56	-2519,187012	800,224976	803	225,4672376	225,8952376	577,1048	0,7187
M. Pindo - Laxe de Moa	490730,60	4748459,95	-1897,793213	627,791992	629	169,8524926	170,2804926	458,7195	0,7293
Faro de Avion	560311,62	4683626,92	-3405,942871	1149,89002	1150	304,831887	305,259887	844,7401	0,7346
M. Tremuzo	503848,75	4741528,49	-1491,182007	523,892029	525	133,4607896	133,8887896	391,1112	0,7450
M. de la Fracha	533730,72	4693820,85	-1476,548828	538,312012	541	132,1511201	132,5791201	408,4209	0,7549
Faro de Domayo	524383,61	4684905,78	-1656,984253	619,437012	627	148,3000906	148,7280906	478,2719	0,7628
Coto de Vilariño	601959,51	4836861,32	-1294,251343	498,394989	499	115,8354952	116,2634952	382,7365	0,7670
M. Galleiro	535595,18	4675976,44	-1846,67749	740,469971	748	165,2776354	165,7056354	582,2944	0,7785
Sierra de Fontefria	555168,05	4673624,82	-2295,244873	942,200012	945	205,4244161	205,8524161	739,1476	0,7822
M. Faro	608014,23	4841606,21	-769,444641	319,523987	319	68,86529537	69,29329537	249,7067	0,7828

Cadro 3.2: Aproximación das alturas nas estacións de Fontán resultado de interpolar con kriging os incrementos de presión nas estacións meteorolóxicas.

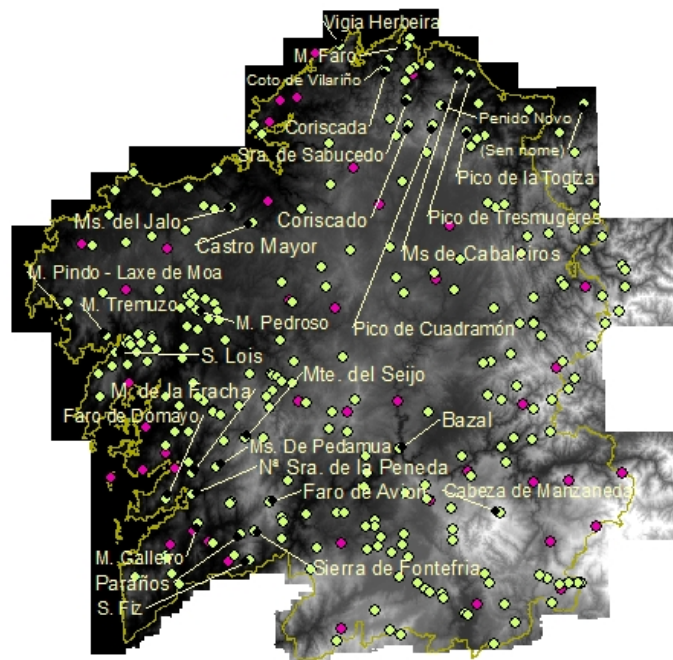


Figura 3.18: Estacións de Fontán etiquetadas (verde) que teñen erros arredor do 70 %.

As estacións de Fontán que dan un erro moi grande son estacións que están considerablemente afastadas das estacións meteorolóxicas, como son Coriscado, Faro de Domayo, Faro de Avión, Monte Pedroso, Monte Faro, Monte del Seijo, Pico de Cuadramón, Pico de la Togiza, Pico de Tresmugeres, Montes de Cabaleiros, N^a Sra. de la Peneda, Sierra de Fontefría, Bazal entre outros moitos cumios como se ve na Figura 3.18.

Tamén podemos observar que nalgunhas estacións de Fontán próximas ás estacións meteorolóxicas nas que existe moita diferenza de altitude as aproximacións son moi malas.

Na zona de Viveiro onde temos unha estación meteorolóxica, Borreiros, hai 3 estacións de Fontán considerablemente cerca como vemos na Figura 3.19.

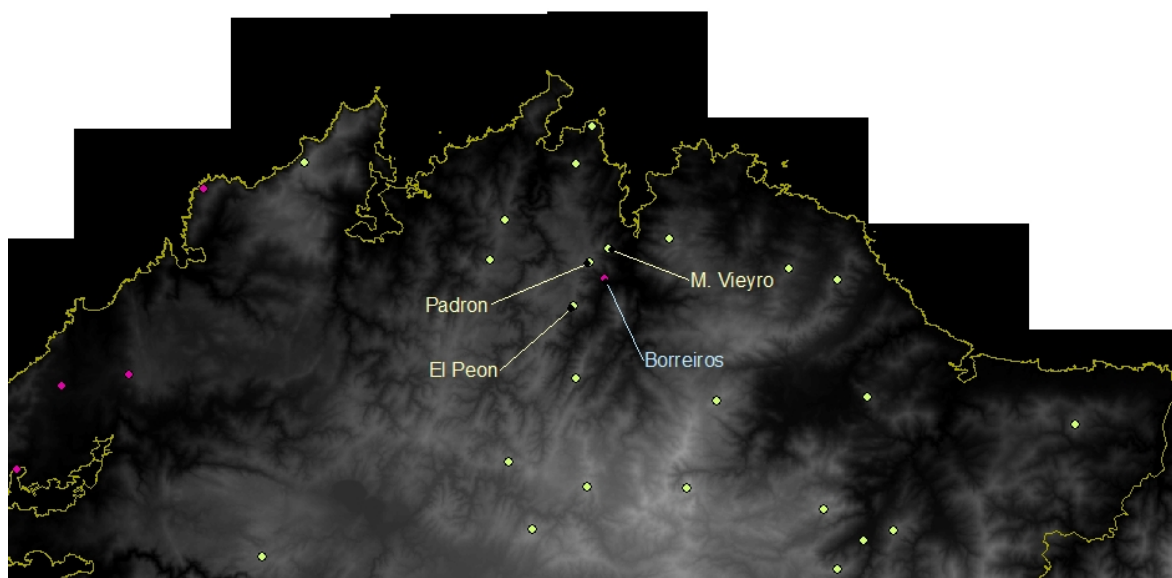


Figura 3.19: Borreiros (estación meteorolóxica) El Peón, M. Vieyro e Padrón (estacións de Fontán).

Estación Fontán	Coord X	Coord Y	ΔP E.F
El Peón	607820,33	4829490,98	-1136,3186
M. Vieyro	610804,20	4834332,24	-532,82349
Padrón	609178,16	4833214,54	-656,89307

Cadro 3.3: Resultados dos incrementos de presión nas estacións de Fontán: El Peón, M.Vieyro e Padrón.

Estación Fontán	Altura <i>MTN</i>	$\triangle H$ E.F	Aproximación Altura E.F	Erro Absoluto	Erro Relativo
El Peón	516	101,700515	102,128515	413,8715	0,8021
M. Vieyro	361	47,687702	48,115702	312,8843	0,8667
Padrón	512	58,7919294	59,2199294	452,7801	0,8843

Cadro 3.4: Resultados da aproximación da altitude nas estacións de Fontán e erros resultantes.

Estación Fontán	Altura <i>MTN</i>	Altura Fontán (m)	Erro Absoluto	Erro Relativo
El Peón	516	471,775	44,2250	0,0857
M. Vieyro	361	349,03	11,9700	0,0332
Padrón	512	492,65	19,3500	0,0378

Cadro 3.5: Altitude en metros calculada por Fontán e erros cometidos.

Nestes casos, o problema é que á hora de interpolar obtemos un incremento de presión semellante ó incremento de presión en Borreiros $\triangle P = -497,4809 Pa$ e por tanto a altura nestas estacións de Fontán sae máis semellante á altitude de Borreiros que é de $67,539 m$ ($H_{Padron} = 59,2199 m$, $H_{M.Vieyro} = 48,1157 m$, $H_{ElPeon} = 102,1285 m$) como vemos no Cadro 3.4. Mentres que co método kriging saenos unha aproximación da altura nas estacións de Fontán cun erro do 80-88 %, Fontán aproxima a altura cun erro do 8 %.

Nome	Coord X	Coord Y	Incr.Presión V.F Kriging	Altura V.F Kriging	Altitude Fontán (m)	Altitude MTN (m)	Erro Absoluto MTN	Erro Relativo MTN	Erro Absoluto Fontán MTN	Erro Relativo Fontán MTN
Vigia de M. Ventoso	555190,13	4814374,2	-128,437592	11,92316448	238,81	242	230,0768	0,9507	3,1900	0,0132
Vigia Herbeira	584909,77	4841703,1	-2463,246094	220,8885254	624,58	611	390,1115	0,6385	13,5800	0,0222
Fontardiñ	581301,24	4808237,4	-4737,925293	424,4723137	662,155	665	240,5277	0,3617	2,8450	0,0043
Peña Guña	604280,15	4810565	-4626,492188	414,4990508	879,255	876	461,5009	0,5268	3,2550	0,0037
Penedo de Gao	615939,66	4835180,5	-828,967529	74,62059385	566,965	552	477,3794	0,8648	14,9650	0,0271
M. Mondigo	650477,13	4819493,6	-3766,673096	337,5452421	582,83	568	230,4548	0,4057	14,8300	0,0261
Nº Sº del Faro	506895,25	4791785,7	-2796,973877	250,757162	237,975	229	21,7572	0,0950	6,9750	0,0392
M. Pindo	490730,6	4748460	-1897,793213	170,2804926	625,415	629	458,7195	0,7293	3,5850	0,0057
Pico de Meda	510779,07	4773384,6	-4788,42334	428,9918889	564,46	561	132,0081	0,2353	3,4600	0,0062
Pedruzos	541526,22	4784977,4	-2528,208984	226,7027041	516,03	521	294,2973	0,5649	4,9700	0,0095
Pedroso	535337,68	4750262,9	-5633,875977	504,6598999	483,465	486	18,6599	0,0364	2,5350	0,0052
Viso	539549,24	4747005	-5665,313965	507,4735999	403,305	401	106,4736	0,2655	2,3050	0,0057
Pena Gallada	543018,71	4748553,4	-5803,82373	519,8702238	484,3	462	37,8702	0,0786	2,3000	0,0048
Cº de S. Marcos	542627,42	4749672,9	-5444,325195	487,695105	394,12	407	80,6951	0,1983	12,8800	0,0316
Coba da Serpe	588549,69	4771140,7	-5713,645996	511,7993166	831,66	836	324,2007	0,3878	4,3400	0,0052
Cordal de Ousa	602351,29	4772220,9	-6135,056152	549,5155256	561,12	739	189,4845	0,2564	177,8800	0,2407
Perreiras	607285,69	4756335,6	-4986,925293	446,7578137	754,005	758	311,2422	0,4106	3,9950	0,0053
Sn. Fitoiro	626549,97	4767615,4	-5170,562012	463,1933001	733,13	728	264,8067	0,3637	5,1300	0,0070
Picoto	638303,25	4750634,6	-7257,053223	649,9342635	1065,46	842	192,0657	0,2281	223,4600	0,2654
Bobia (Pico)	666358,49	4804866,1	-5538,130371	496,0906682	1191,545	1197	700,9093	0,5856	5,4550	0,0046
Piedras Apañadas	666138,1	4778323,1	-7814,200195	699,7989175	1180,69	1197	497,2011	0,4154	16,3100	0,0136
M. Gialbre	524678,76	4719968,5	-4043,307617	362,3040317	640,445	641	278,6960	0,4348	0,5550	0,0009
M. Gesteiras	533894,74	4724891,7	-5579,994141	499,8374756	720,605	715	215,1625	0,3009	5,6050	0,0078
Crujeira	535908,12	4743333,5	-5970,426758	534,7811948	374,915	378	156,7812	0,4148	3,0850	0,0082
M. Abelera	544513,65	4704875,5	-3581,781982	320,9974874	779,89	774	453,0025	0,5853	5,8900	0,0076
Pico Sagro	545241,61	4739547,2	-5502,955078	492,9424795	534,4	533	40,0575	0,0752	1,4000	0,0026
S. Sebastian	553458,77	4727839,8	-5455,63623	488,7074426	756,51	749	260,2926	0,3475	7,5100	0,0100
Pico de Costenla	558170,63	4705900,9	-4867,709961	436,0880415	948,56	951	514,9120	0,5414	2,4400	0,0026
Pico del Farelo	585782,05	4733979,1	-6376,661621	571,1392151	948,56	954	382,8608	0,4013	5,4400	0,0057
Cabeza de Meda	614447,9	4689567,6	-9465,808594	847,6178692	1313,455	1316	468,3821	0,3559	2,5450	0,0019
Peña del Pico	647276,9	4745338,6	-9370,753906	839,1104746	1189,04	1184	344,8895	0,2913	5,0400	0,0043
Capeloso	664414,16	4722604,1	-14006,75488	1254,032562	1603,2	1598	343,9674	0,2152	5,2000	0,0033
Faro de Domayo	524383,61	4684905,8	-1656,984253	148,7280906	625,415	627	478,2719	0,7628	1,5850	0,0025
M. Galeiro	535595,18	4675976,4	-1846,67749	165,7056354	738,975	748	582,2944	0,7785	9,0250	0,0121
M. Galifeiro	524903,51	4664009,1	-4854,246094	434,8830254	713,925	709	274,1170	0,3866	4,9250	0,0069
Coto da Cerca	547283,12	4683890,9	-1924,444702	172,6658008	903,47	897	724,3342	0,8075	6,4700	0,0072
S. Mamed	548510,34	4664910,6	-1530,956177	137,4485778	689,71	694	556,5514	0,8019	4,2900	0,0062
Penagache	574887,93	4660212,7	-6911,442871	619,002137	1237,47	1225	605,9979	0,4947	12,4700	0,0102
Larouco	605798,83	4637541,6	-9789,871094	876,6214629	1547,255	1538	661,3785	0,4300	9,2550	0,0060

Cadro 3.6: Resultados da altitude nos vértices da triangulación e erros cometidos da aproximación da altitude por kriging e Fontán respecto do *Mapa Topográfico Nacional*.

No Cadro 3.6 temos unha táboa cos incrementos de presión nos vértices da triangulación de Fontán resultado de facer interpolación dos incrementos de presión nas estacións meteorolóxicas e unha aproximación da altitude. Na 6ª e 7ª columna temos a altitude en metros calculada por Fontán nos vértices e a altitude que figura no *Mapa Topográfico Nacional (MTN)*. Nas últimas columnas da táboa amosamos os erros cometidos da aproximación da altitude por kriging e Fontán respecto do *MTN*.

Nos vértices da triangulación fundamental de Fontán obtemos un erro promedio do 43,65 % coa altitude dada polo *Mapa Topográfico Nacional*. Pola contra, Fontán nos vértices da triangulación fundamental calculou a altitude cun erro promedio do 2,18 %.

Por tanto, aínda que a presión e a altitude vimos que correlacionan moi ben e en zonas onde as estacións de Fontán están moi próximas ás nosas estacións a hipótese non está descamiñada e o kriging fai unha boa aproximación, globalmente chegamos a que este método non é resultante, pois Fontán a maior parte das estacións que mediu eran cumios moi altos, e sen embargo nós estamos a interpolar estacións meteorolóxicas moi diversas, con altitudes moi oscilantes e moi separadas espacialmente.

Fontán mediu presións atmosféricas e temperaturas, polo que deducimos que a influencia da temperatura na densidade e no cálculo da altitude é fundamental.

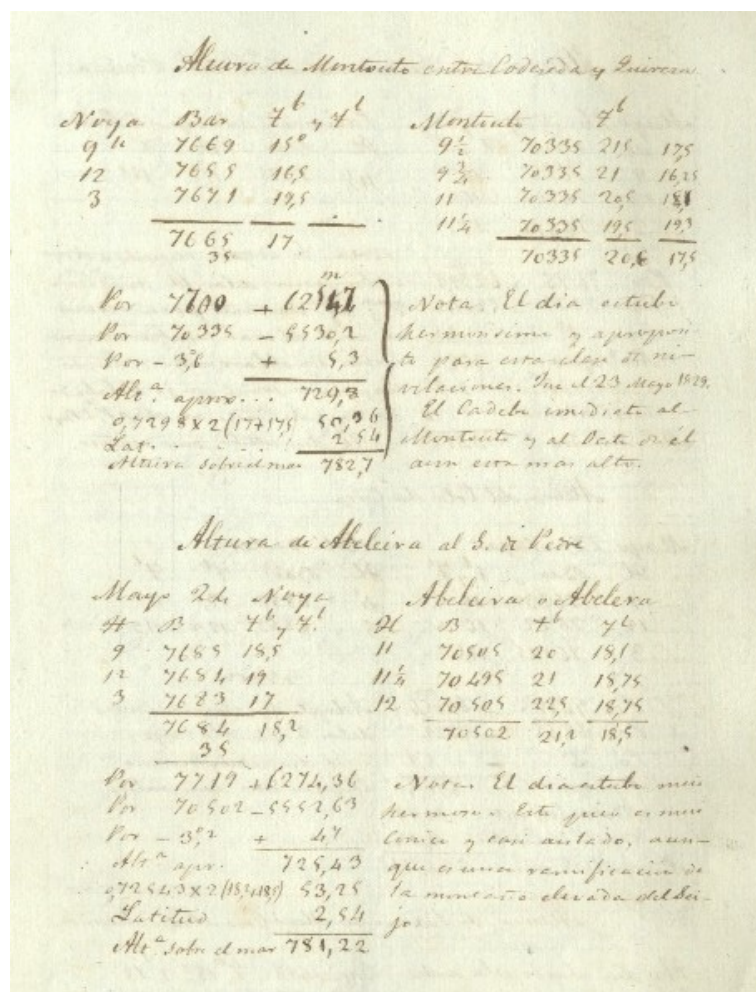


Figura 4.2: Cálculos da altitude realizados por Domingo Fontán en Montouto e Abeleira empregando presións e temperaturas (fonte web da Fundación Domingo Fontán).

Na Figura 4.2 vemos como calculou unha aproximación da altitude e a altitude sobre o nivel do mar en dúas estacións. Calculaba presións en milímetros de mercurio (*mmHg*) e temperaturas en graos centígrados a distintas horas do día. Realizaba as medias dos datos e facía unha corrección destes. Mentres o seu irmán facía as medicións en Noia, el anotaba as apreciacións no cumio de interese. Vemos que na última columna da Figura 4.2, tanto en Montouto como en Abeleira, fai unha corrección da temperatura que podería ser respecto da temperatura do mercurio do barómetro. Tentaremos investigar estas contas.

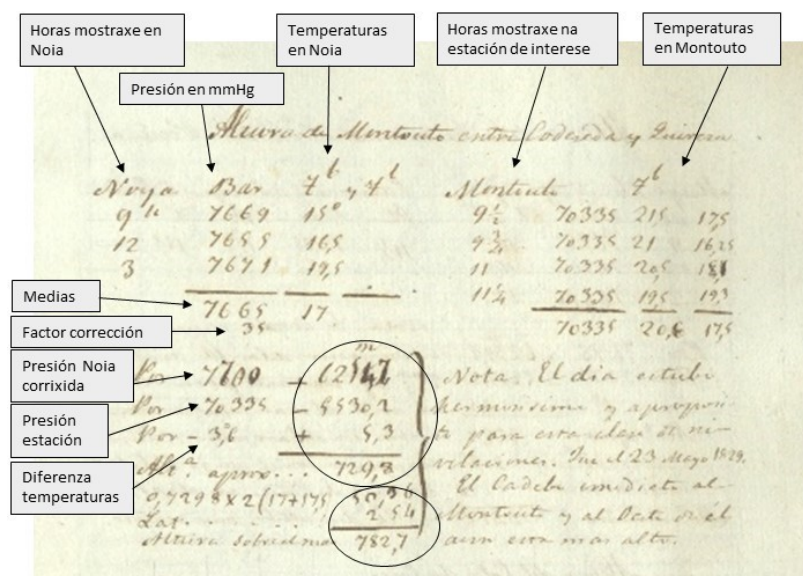


Figura 4.3: Análise dos cálculos de Fontán en Montouto.

O barómetro de Fortín ten un tubo de vidro protexido por outro de latón, con dúas ranuras opostas para ver o nivel do mercurio nunha escala dividida en milímetros e mediante un nonio, que se fai enrasar coa superficie libre do mercurio na columna barométrica, apréciase a décima de milímetro.

A lectura obtida no barómetro débese corrixir: primeiro da temperatura que intervén na dilatación do mercurio, do vidro e da vaina de latón, segundo da capilaridade do tubo e terceiro referir a presión a cero graos, é dicir, devolver a presión observada á que correspondería con latitude 45° e altitude 0.

Vexamos a corrección da temperatura: o mercurio non molla o vidro e como consecuencia fórmase un menisco convexo, cuxa parte máis alta queda por baixo do nivel que alcanzaría o mercurio de non haber capilaridade. A corrección do menisco depende do diámetro do tubo e da altura do menisco que non só varía dun instrumento a outro senón, ao cabo do tempo nun mesmo instrumento. Existen táboas de dobre entrada, en función do diámetro do tubo e da frecha do menisco, que dan calculada a corrección expresada en décimas de milímetro.

A escala de latón, que foi graduada a cero graos, dilatarase coa temperatura e por iso a lectura B_1 obtida será inferior á que correspondería coa escala a cero graos.

$$B_2 = B_1(1 + \alpha t),$$

onde α é o coeficiente de dilatación do latón (0,0000186) e t a temperatura.

Finalmente haberá que referir a cero graos a columna barométrica de altura B_2 .

O mercurio ao dilatarse diminuíra a densidade e por conseguinte a lectura B_2 que alcanza é superior á que tería se a temperatura fose de cero graos.

$$B = B_2(1 - \beta t),$$

onde β é o coeficiente de dilatación lineal do mercurio (0,000179). Substituíndo nesta fórmula, B_2 polo seu valor, temos:

$$B = B_1[1 - (\beta - \alpha)t] = B_1(1 - 0,00016t).$$

Estes barómetros son moito máis precisos que os barómetros metálicos, aneroides ou hostéricos (ver [15]).

Vexamos agora o principio do cálculo das diferenzas de nivel. Sexan t_A e t_B as temperaturas de dúas estacións S_A e S_B , de altitudes H_A e H_B e alturas barométricas observadas B_A e B_B medidas en kilogramo por centímetro cadrado (kg/cm^2) (con todas as correccións feitas), ρ a densidade do aire, B_0 e ρ_0 a presión e densidade reducida a nivel do mar a 0° e g a intensidade media da gravidade. Partindo de novo da hipótese principal do traballo temos que a variación elemental de presión dB relaciónase coa variación elemental de altura dH coa seguinte ecuación:

$$dB = -\rho g dH. \quad (4.1)$$

Integrando entre S_A e S_B tense:

$$-g(H_B - H_A) = \int_{S_A}^{S_B} \frac{1}{\rho} dB,$$

e usando a lei de Mariotte e Gay-Lussac obtense:

$$\rho = \frac{\rho_0}{B_0} \frac{B}{(1 + \alpha t)} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{B} \frac{B_0(1 + \alpha t)}{\rho_0}.$$

Logo temos:

$$H_A - H_B = \frac{B_0(1 + \alpha t)}{g \rho_0} \int_{S_A}^{S_B} \frac{1}{B} dB,$$

e integrando obtense:

$$H_A - H_B = \frac{B_0(1 + \alpha t)}{g \rho_0} \ln \left(\frac{B_B}{B_A} \right).$$

Designando μ como módulo de logaritmos neperianos chegamos á seguinte fórmula:

$$H_A - H_B = \frac{B_0(1 + \alpha t)}{\mu g \rho_0} \log \left(\frac{B_B}{B_A} \right),$$

onde $t = \frac{t_A + t_B}{2}$ e $\frac{B_0}{\mu g \rho_0} = 18400$.

Chegamos por tanto á ecuación de Laplace simplificada (ver [16]):

$$H_A - H_B = 18400 \left(1 + \alpha \frac{t_A + t_B}{2} \right) \log \left(\frac{B_B}{B_A} \right). \quad (4.2)$$

Para manter a notación no resto da memoria, a ecuación (4.2) é equivalente á expresión:

$$H_A^B = 18400 \left(1 + \alpha \frac{t_A + t_B}{2} \right) \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right), \quad (4.3)$$

onde $H_A^B = H_B - H_A$.

Agora presentamos outra forma de chegar á fórmula de Laplace simplificada.

Sexa p_e o peso específico do aire no momento da experiencia, ρ a densidade e g a aceleración da gravidade, temos novamente a ecuación (4.1):

$$dB = -p_e dH = -\rho g dH.$$

Para determinar cá é o valor descoñecido da densidade ρ , en función da densidade do aire seco, ρ_0 , á presión normal, B_0 e a 0° de temperatura, basta recordar a ecuación xeral dos gases:

$$BV = B_0 V_0 (1 + \alpha t). \quad (4.4)$$

Por definición de densidade $\rho = \frac{M}{V}$, tense: $V = \frac{M}{\rho}$ e $V_0 = \frac{M}{\rho_0}$.

Polo tanto:

$$B \rho_0 = B_0 \rho (1 + \alpha t) \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{B}{B_0} \frac{1}{(1 + \alpha t)}.$$

Substituíndo este valor na ecuación (4.1) temos:

$$-dB = \rho_0 \frac{B}{B_0} \frac{1}{(1 + \alpha t)} g dH \Rightarrow -\frac{dB}{B} = \frac{\rho_0 g}{B_0 (1 + \alpha t)} dH.$$

Considerando, coma no método anterior, dúas estación S_A e S_B de altitude H_A e H_B con medicións de presión B_A e B_B , a integral resultante do primeiro membro da ecuación anterior é:

$$-\int_{B_A}^{B_B} \frac{1}{B} dB = \ln B_A - \ln B_B = \ln \left(\frac{B_A}{B_B} \right) = \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right) \frac{1}{\mu},$$

sendo μ o módulo de conversión dos logaritmos neperianos a decimais. Realizamos agora a integral do segundo membro da ecuación e obtemos:

$$\int_{H_A}^{H_B} \frac{\rho_0 g}{B_0 (1 + \alpha t)} dH = \frac{\rho_0 g}{B_0 (1 + \alpha t)} (H_B - H_A) = \frac{\rho_0 g}{B_0 (1 + \alpha t)} H_A^B.$$

Igualando estas dúas expresións, temos finalmente:

$$\frac{\rho_0 g}{B_0 (1 + \alpha t)} H_A^B = \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right) \frac{1}{\mu},$$

$$H_A^B = \frac{B_0}{\rho_0 g \mu} (1 + \alpha t) \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right).$$

Pasando $B_0 = 1013000$ barias, $\rho_0 = 0,001293 \text{ g/cm}^3$, $g = 980,6 \text{ cm/s}^2$, $\mu = 0,4342945$ a unidades do Sistema Internacional tense que $\frac{B_0}{\rho_0 g \mu} = 18400 \text{ m}$, e sendo $t = \frac{t_A + t_B}{2}$ o valor medio das temperaturas medidas en S_A e S_B , resulta de novo a ecuación de Laplace simplificada, para o desnivel en metros:

$$H_A^B = 18400 \left(1 + \alpha \frac{t_A + t_B}{2} \right) \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right).$$

Acabamos de empregar a ecuación xeral dos gases para determinar a densidade do aire, pero o aire non se comporta exactamente como un gas perfecto, nin é seco, pois contén certo grao de humidade. Pola contra a aceleración da gravidade varía duns lugares a outros e todo iso determina que a fórmula de Laplace non corresponde rigorosamente ás situacións reais (ver [17]).

Polo tanto deducimos mediante a hipótese principal do traballo, baseada na fórmula barométrica $-dB = \rho g dH$, e a ecuación xeral dos gases $BV = B_0 V_0 (1 + \alpha t)$, a fórmula de Laplace simplificada:

$$H_A^B = 18400(\log B_A - \log B_B)(1 + 0,004 t_m),$$

onde H_A^B é a diferenza de alturas entre dous puntos, B_A é a lectura barométrica en milímetros do punto máis baixo, B_B é a lectura barométrica en milímetros do outro punto, $t_m = \frac{t_A + t_B}{2}$ é o promedio das temperaturas en graos centígrados tomadas en ambos puntos e $\alpha = 0,004^\circ\text{C}^{-1}$ é o coeficiente de dilatación do aire (ver [18]).

Laplace completa a fórmula (4.2) cun factor de corrección da gravidade en función da latitude φ e altitude e un factor de corrección por dilatación que inclúe a tensión de vapor da auga:

$$H_A - H_B = 18400 \left(1 + \alpha \frac{t_A + t_B}{2} \right) \log \left(\frac{B_B}{B_A} \right) (1 + \alpha \cos(2\varphi) + \beta H_m) \left[1 + \frac{0,377}{2} \left(\frac{f_A}{B_A} + \frac{f_B}{B_B} \right) \right].$$

Partindo da ecuación (4.2) e tendo en conta as aproximacións consideradas en [16]:

- $\log \left(\frac{B_B}{B_A} \right) = \log \left(1 + \frac{B_B - B_A}{B_A} \right) \approx \mu \frac{B_B - B_A}{B_A} \approx 2\mu \frac{B_B - B_A}{B_B + B_A}.$
- $\alpha \frac{t_A + t_B}{2} = 2 \frac{t_A + t_B}{1000}.$

Babinet chega á seguinte fórmula (ver [16]):

$$H_A - H_B = 16022 \frac{B_B - B_A}{B_B + B_A} \left(1 + 2 \frac{t_A + t_B}{1000} \right).$$

Procedemos a contactar con Luis Carlos Arboleda da Universidade del Valle (Colombia) e condúcenos a unha serie de fórmulas barométricas (de Deluc, Shuckburgh, Trembley e Tralles) que serían substituídas posteriormente pola fórmula de Laplace (ver [19]).

Co tempo estas fórmulas foron sufrindo correccións a partir de numerosas experiencias sobre os efectos da temperatura na dilatación do aire e o mercurio no instrumento. Estas correccións xurdían porque a temperatura do aire non é uniforme, senón que diminúe co aumento da altitude e a variación da temperatura no instrumento tradúcese nun cambio na altitude da columna de mercurio dentro do barómetro.

Chegamos así á fórmula barométrica estándar de Laplace que ten a seguinte expresión analítica:

$$H_A^B = 18336m (1 + 0,002845 \cos 2\varphi) \left(1 + \frac{2(t_A + t_B)}{1000} \right) \left[\left(1 + \frac{H_A^B}{a} \right) \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right) + \frac{H_A^B}{a} 0,868589 \right],$$

sendo φ a latitude do lugar e a o raio do globo terrestre (Humboldt y Oltmanns, 1810, p.283; Laplace, 1805, p.292) (ver [19]).

Se a densidade do aire fora homoxénea, a medición de alturas polas indicacións do barómetro sería exacta, pero o aire non ten densidade homoxénea nin constante e a determinación de alturas polas indicacións barométricas non é un problema tan exacto nin sinxelo.

A fórmula de Laplace que dá o desnivel entre dúas estacións en función das lecturas barométricas, das temperaturas dos termómetros e da latitude é (ver [20]):

$$H_A^B = 18405 (1 + 0,0026 \cos 2\varphi) \left[1 + \frac{2(t_A + t_B)}{1000} \right] \log \left(\frac{B_A}{B_B} \right). \quad (4.5)$$

Vexamos agora que precisión dá a ecuación de Laplace simplificada nas estacións meteorolóxicas. Collemos variables dez-minutais de presións e temperaturas nun día aleatorio¹ e obtemos os seguintes resultados:

Corón			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:30	14,84	1009	756,81
12:00	16,6	1008,9	756,74
15:00	17,73	1007,8	755,91
Media	16,39		756,49

Castrove			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:30	14,56	960,3	720,29
9:40	14,77	960,3	720,29
11:00	15,53	960,5	720,44
11:10	15,36	960,5	720,44
Media	15,06		720,36

Cadro 4.1: Presións e temperaturas en Corón e Castrove o 17/04/2010 nas horas dadas e as correspondentes medias aritméticas.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Castrove	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
415,6643471	416,0923471	432,244995	16,1526	0,0374

Cadro 4.2: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace simplificada (4.3) en Castrove e erros cometidos (medidas recollidas no Cadro 4.1).

¹17 de abril, data do nacemento de Domingo Fontán.

Corón			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:30	14,84	1009	756,81
12:00	16,6	1008,9	756,74
15:00	17,73	1007,8	755,91
Media	16,39		756,49
Courel			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:30	12,58	922,7	692,08
9:40	12,57	922,7	692,08
11:00	15,35	922,3	691,78
11:10	14,52	922,2	691,71
Media	13,76		691,92

Cadro 4.3: Presións e temperaturas en Corón e Courel o 17/04/2010 nas horas dadas e as correspondentes medias aritméticas.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Courel	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
755,9413683	756,3693683	771,879028	15,5097	0,0201

Cadro 4.4: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace simplificada (4.3) en Courel e erros cometidos (medicións recollidas no Cadro 4.3).

Corón. Latitude $\varphi = 42,580075^\circ$			
Hora	Temperatura $^\circ\text{C}$	Presión hPa	Presión $mmHg$
9:30	14,84	1009	756,81
12:00	16,6	1008,9	756,74
15:00	17,73	1007,8	755,91
Media	16,39		756,49

Courel. Latitude $\varphi = 42,59468056^\circ$			
Hora	Temperatura $^\circ\text{C}$	Presión hPa	Presión $mmHg$
11:00	15,35	922,3	691,78
11:10	14,52	922,2	691,71
12:00	15,47	921,8	691,41
Media	15,11		691,63

Cadro 4.5: Presións e temperaturas en Corón e Courel o 17/04/2010 nas horas dadas e as correspondentes medias aritméticas.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Courel	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
761,4273064	761,8553064	771,879028	10,0237	0,0130

Cadro 4.6: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace simplificada (4.3) en Courel e erros cometidos (medicións recollidas no Cadro 4.5).

Podemos observar que se cambiamos as horas de medición no Courel, a altitude pode variar en máis de 5 metros como se ve no Cadro 4.4 e no Cadro 4.6.

Corón			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:00	20,91	1017,4	763,11
12:00	27,17	1017,6	763,26
15:00	29,67	1016,2	762,21
Media	25,92		762,86
Fontecada. Latitude $\varphi = 42,96861667^\circ$			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
11:00	26,01	976,9	732,74
11:10	26,6	976,9	732,74
12:00	27,9	976,9	732,74
Media	26,84		732,74
Viana do Bolo. Latitude $\varphi = 42,16304167^\circ$			
Hora	Temperatura °C	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
11:00	22,96	924,6	693,51
11:10	23,29	924,5	693,43
12:00	24,41	924,1	693,13
Media	23,55		693,36

Cadro 4.7: Presións e temperaturas en Corón, Fontecada e Viana do Bolo o 21/05/2010 nas horas dadas e as correspondentes medias aritméticas.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Fontecada	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
355,8745813	356,3025813	364,164001	7,8614	0,0216
ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Viana	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
838,8687108	839,2967108	843,815979	4,5193	0,0054

Cadro 4.8: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace simplificada (4.3) en Fontecada e Viana do Bolo e erros cometidos (medicións recollidas no Cadro 4.7).

Agora consideramos medicións dez-minutais de presións e temperaturas dun día enteiro, calculando as medias dos datos nas estacións de Corón, Castrove e Muralla.

Corón	
Media temperatura	Media Presión <i>mmHg</i>
14,8	756,08
Castrove	
Media temperatura	Media Presión <i>mmHg</i>
12,9	714,81
Muralla. Latitude $\varphi = 42,74558333^\circ$	
Media temperatura	Media Presión <i>mmHg</i>
10,98	700,36

Cadro 4.9: Presións e temperaturas en Corón, Castrove e Muralla o 17/04/2010 tomando variables dez-minutais.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Castrove	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
473,3882752	473,8162752	432,244995	41,5713	0,0962
ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Muralla	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
643,2750644	643,7030644	660,98999	17,2869	0,0262

Cadro 4.10: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace simplificada (4.3) en Castrove e Muralla e erros cometidos (medicións recollidas no Cadro 4.9).

Veremos agora algún resultado da ecuación de Laplace orixinal nas estacións meteorolóxicas.

ΔH ec. Laplace orixinal	Aproximación Altura Courel	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
761,8007884	762,2287884	771,879028	9,6502	0,0125

Cadro 4.11: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace orixinal (4.5) en Courel e erros cometidos o 17/04/2010 (medicións recollidas no Cadro 4.5).

ΔH ec. Laplace orixinal	Aproximación Altura Fontecada	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
356,0431181	356,4711181	364,164001	7,6929	0,0211
ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Viana	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
839,2965499	839,7245499	843,815979	4,0914	0,0048

Cadro 4.12: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace orixinal (4.5) en Fontecada e Viana do Bolo o 21/05/2010 e erros cometidos (medicións recollidas no Cadro 4.7).

Agora probamos con medicións dez-minutais de presións e temperaturas dun día enteiro nas estacións de Corón e Muralla.

ΔH ec. Laplace orixinal	Aproximación Altura Muralla	Altitude <i>MDT</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
643,5862013	644,0142013	660,98999	16,9758	0,0257

Cadro 4.13: Cálculos da aproximación da altitude coa ecuación de Laplace orixinal (4.5) en Muralla e erros cometidos o 17/04/2010 (medicións recollidas no Cadro 4.9).

Os resultados tamén varían segundo a constante de Laplace utilizada e as correccións realizadas. Hoxe en día as presións son medidas con aparellos modernos, polo que nos cálculos realizados non fixemos ningunha corrección.

Podemos ver nas táboas anteriores que nas estacións meteorolóxicas a fórmula de Laplace simplificada e a ecuación de Laplace orixinal fan unha aproximación da altitude bastante boa, cuns erros arredor do 2-3 %.

Se realizamos medicións dez-minutais dun día enteiro e facemos a media vemos que o resultado xa non é tan bo, coma no caso de Castrove, no Cadro 4.10, cun erro absoluto de 41,5713 metros, o que equivale a un erro relativo de 9,62 %. Isto indica que o método que empregaba Fontán nos seus cálculos ao coller só varias medicións nun día é moito máis resultante que coller un día enteiro.

Expedición ao Penagache

Por curiosidade científica realizamos medicións na estación *Penagache* que é un vértice da triangulación fundamental de Domingo Fontán (ver todos os vértices na Figura 3.20 e ao detalle o Penagache na Figura 4.4).

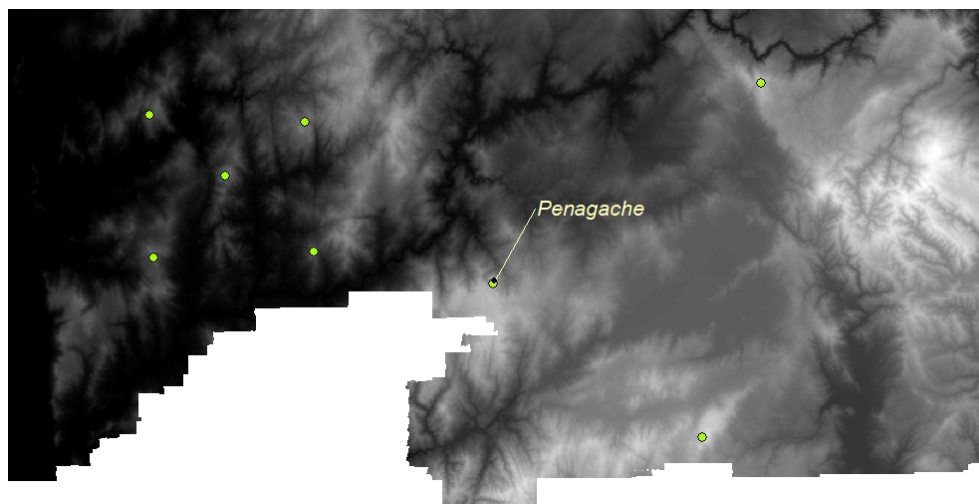


Figura 4.4: Situación xeográfica do *Penagache* no mapa.

Estos datos introducíranse posteriormente nas fórmulas que segundo a documentación dispoñible podería ter utilizado o científico galego na elaboración da Carta Xeométrica de Galicia, analizando os resultados e comparándoos cos obtidos polo matemático xeógrafo hai 200 anos.

Nun principio a idea era usar un barómetro aneroide para a medición da presión atmosférica en milibares ou hectopascals no vértice de Fontán, pero debido ao insuficiente rango de medición do barómetro do que dispoñíamos e a imposibilidade de conseguir outro dado o contexto sanitario no tempo de redactar esta memoria, a única alternativa foi empregar o barómetro do Instituto Xeográfico Nacional a través da aplicación dixital que este organismo ten á disposición dos usuarios.

Ao mesmo tempo mediuse a temperatura en graos centígrados cun termómetro e coa axuda dun *GPS* localizáronse as coordenadas.

Tomáronse, por parte da autora, datos en dous puntos a distinta altitude con coordenadas moi próximas ás que puido medir Fontán tantos anos atrás.

No primeiro punto de estudo do vértice, con coordenada X=574868 e coordenada Y=4660206, tomáronse as seguintes medidas:

Corón			
Hora	Temperatura °C	Presión hPa	Presión mmHg
9:30	17,3	1020,34	765,32
12:00	18,05	1020,75	765,63
15:00	19,15	1020,37	765,34
Media	18,17		765,43

Penagache. Latitude $\varphi = 42,090367^\circ$			
Hora	Temperatura °C	Presión hPa	Presión mmHg
12:30	19	883,6	662,76
13:20	17	883,6	662,76
13:40	17	883,6	662,76
Media	17,67		662,76

Cadro 4.14: Medicións de presión e temperatura tomadas o 28/06/2020 no primeiro punto de estudo do *Penagache* ás horas dadas e as correspondentes medias.

Obtemos as seguintes aproximacións da altitude no vértice mediante a fórmula de Laplace simplificada e a ecuación de Laplace orixinal dadas nos Cadros 4.15 e 4.16 respectivamente.

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura Penagache	Altitude MTN	Erro Absoluto	Erro Relativo
1233,401984	1233,829984	1225	8,8300	0,0072

Cadro 4.15: Altitude dada pola fórmula de Laplace simplificada (4.3) no primeiro punto de estudo e erros cometidos ao comparar co valor da altura que figura no *MTN*.

ΔH ec. Laplace orixinal	Aproximación Altura Penagache	Altitude MTN	Erro Absoluto	Erro Relativo
1234,035094	1234,463094	1225	9,4631	0,0077

Cadro 4.16: Altitude dada pola fórmula de Laplace orixinal (4.5) no primeiro punto de estudo e erros cometidos ao comparar co valor da altura que figura no *MTN*.

Altitude Fontán (m)	Altitude <i>MTN</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
1237,47	1225	12,47	0,0102

Cadro 4.17: Altitude calculada por Fontán no *Penagache* e erros cometidos ao comparar co valor da altura que figura no *MTN*.

Analogamente realizamos o mesmo procedemento no punto máis alto da zona, con coordenada X=574892 e coordenada Y=4660216, tomando as seguintes medicións:

Corón. Latitude $\varphi = 42,580075^\circ$			
Hora	Temperatura $^\circ\text{C}$	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
9:30	17,3	1020,34	765,32
12:00	18,05	1020,75	765,63
15:00	19,15	1020,37	765,34
Media	18,17		765,43
Penagache. Latitude $\varphi = 42,09045278^\circ$			
Hora	Temperatura $^\circ\text{C}$	Presión <i>hPa</i>	Presión <i>mmHg</i>
12:40	16	882,9	662,23
13:00	17	883	662,31
13:15	18,5	883,1	662,38
Media	17,17		662,31

Cadro 4.18: Medicións de presión e temperatura tomadas o 28/06/2020 no segundo punto de estudo do *Penagache* ás horas dadas e as correspondentes medias.

Obtendo os resultados amosados nos Cadros 4.19 e 4.20:

ΔH ec. Laplace simplificada	Aproximación Altura <i>Penagache</i>	Altitude <i>MTN</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
1238,062275	1238,490275	1225	13,4903	0,0110

Cadro 4.19: Altitude dada pola fórmula de Laplace simplificada (4.3) no segundo punto de estudo e erros cometidos ao comparar co valor da altura que figura no *MTN*.

ΔH ec. Laplace orixinal	Aproximación Altura Penagache	Altitude <i>MTN</i>	Erro Absoluto	Erro Relativo
1238,697772	1239,125772	1225	14,1258	0,0115

Cadro 4.20: Altitude dada pola fórmula de Laplace orixinal (4.5) no segundo punto de estudo e erros cometidos ao comparar co valor da altura que figura no *MTN*.

Fóronse seguindo os pasos que, segundo a documentación recollida, consideramos que realizaba Fontán nas súas expedicións, tomando como estación de referencia Corón en vez de Noia, collendo varias medicións nun día e realizando as medias.

Podemos observar que as altitudes acadadas con estas fórmulas achéganse moito á altitude que obtivo Fontán neste cumio. No primeiro punto onde realizamos as medicións obtemos unha diferenza de 3,64 e 3 metros entre a altitude calculada coas fórmulas de Laplace e a altitude de Fontán.

Por outra parte a diferenza entre os resultados calculados e a altitude do *MTN* é de 8,83 e 9,4631 metros para a ecuación Laplace simplificada e orixinal respectivamente, o que supón uns erros de 0,72 % e 0,77 %, moi similares ós obtidos por Fontán.

Fontán mediu máis preto do punto máis alto considerado, dado que as coordenadas son case coincidentes, o que se traduce nunhas altitudes moi semellantes, cunha diferenza de 1,02 e 1,65 metros coas fórmulas mencionadas.

Neste segundo punto a diferenza da altitude calculada respecto a do *MTN* é de 13,4903 e 14,1258 metros con ambas fórmulas, o que equivale a un erro dun 1,10 % e 1,15 %, superior ao do xeógrafo (1,02 %).

Esto indícanos que Fontán empregou nos seus cálculos unha variante destas fórmulas, non podemos afirmar con certeza cal foi a fórmula exacta que usou, pero os cálculos son moi próximos.

Estos resultados varían segundo as constantes utilizadas nas fórmulas, as condicións meteorolóxicas e as correccións coa latitude e co instrumento empregado.

As diferenzas dos instrumentos e tecnoloxías actuais cos da época de Fontán fan máis grande a súa obra e a admiración pola precisión do seu traballo.

Capítulo 5

Conclusións

Concluímos este traballo dicindo que a hipótese inicial non nos permitiu determinar os valores da altitude nas estacións de Fontán coa precisión esperada.

Traballamos coa presión media calculada cos datos diarios obtidos en cada estación nun período de 4 anos desprezando a influencia da temperatura sobre a mesma.

Máis tarde descubrimos que Fontán utilizaba nas súas fórmulas a media das presións medidas a distintas horas nun mesmo día e que a temperatura inflúe no valor da densidade do aire e consecuentemente na altitude equivalente.

Utilizamos os datos descargados por *R* de todas as estacións meteorolóxicas de Galicia que recollían os valores da presión atmosférica, o cal tradúcese en datos insuficientes á hora de interpolar e obter resultados aplicables a todo o territorio galego, o que nos levou a comprobar que a interpolación só podería aplicarse con certo éxito nas estacións de Fontán moi próximas ás estacións meteorolóxicas e con pouca variabilidade orográfica entre ambas.

Polo tanto, o problema radica nas poucas e dispersas estacións coas que contamos e na variabilidade orográfica que a interpolación non contempla.

Tras non obter os resultados esperados, proseguimos a investigación no procedemento utilizado por Fontán na determinación das altitudes nas súas estacións.

A pandemia e o confinamento supuxo un atranco á hora de acceder a fontes de datos relacionadas co científico.

Analizados os datos de Fontán coa limitada documentación dispoñible chegamos a unha serie de fórmulas que posiblemente foron utilizadas polo matemático no cálculo da altitude de forma sorprendentemente precisa para o instrumental e métodos da época.

A nivel persoal, o traballo supuxo mellorar os meus coñecementos con *R*, *MATLAB* e *ArcGIS*, a aprendizaxe dunha análise completa de datos, métodos de interpolación que descoñecía por completo e ensinoume que as matemáticas pódense aplicar a a numerosos

e diversos campos. E no noso caso, serve para voltar a mirada atrás e valorar os avances e resultados ós que a propia disciplina, da man de Domingo Fontán, Catedrático de Matemáticas Sublimes da USC, chegou hai dous séculos.

Bibliografía

- [1] Real Academia Galega de Ciencias, *Domingo Fontán. Científico galego do ano. Revista da Real Academia Galega de Ciencias*, (37), 2018. Dispoñible en https://www.ragc.gal/revista/REVISTAS/anuario2018_0.pdf.
- [2] Christian Gilain, La place de l'analyse dans la classification des mathématiques: de l'Encyclopédie à la Méthodique, *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, **45**, 109–1028, 2010. Dispoñible en <https://doi.org/10.4000/rde.4728>.
- [3] Margarita Barral Martínez, Xosé Fraga Vázquez, Gonzalo Méndez Martínez, Víctor Pollán Fernández, Julio Rodríguez Taboada, M. Elena Vázquez Cendón, *Unidade Didáctica Domingo Fontán e a Carta geométrica de Galicia*, Consello da Cultura Galega, 2019. Dispoñible en http://consellodacultura.gal/mediateca/extras/CCG_2018_Domingo-Fontan-e-a-Carta-geometrica-de-Galicia.pdf.
- [4] Margarita Barral Martínez, *Domingo Fontán Rodríguez*, en Álbum da Ciencia. Consello da Cultura Galega, 2012. Dispoñible en <http://culturagalega.gal/albumdaciencia/detalle.php?id=318>.
- [5] César Camargo Sánchez, La 1ª triangulación geodésica de Galicia, *Fundación Domingo Fontán. Artículos y publicaciones*, 2012. Dispoñible en <http://www.fundaciondomingofontan.es/la-primera-triangulacion-geodesica-de-galicia.html>.
- [6] Manuel Barrero Ripoll, M^a Luisa Casado Fuente, M^a Ángeles Castejón Solanas, Luis Sebastián Lorente, *Trigonometría Esférica Fundamentos*, E.T.S De Ingeniería en Topografía, Geodesia y Cartografía. Universidad Politécnica de Madrid, 2008. Dispoñible en <http://asignaturas.topografia.upm.es/matematicas/primero/Apuntes/Trigonometria/Trigonometria%20Esferica.pdf>
- [7] Instituto Geográfico Nacional, *Temas Generales. Topografía y Cartografía. Instituto Geográfico Nacional. Tema 59: Proyecciones cónicas y pseudocónicas. Proyec-*

- ción de Bonne*. Disponible en <http://www.ign.es/web/resources/docs/IGNCnig/QSM-CNIG-Becas-Temario-A3.pdf>.
- [8] Instituto Geográfico Nacional, *Galicia. Mapas Generales. 1845*, Catálogo de Fondos Cartográficos del Instituto Geográfico Nacional, N° 0447, 2000. Disponible en <https://www.ign.es/web/catalogo-cartoteca/resources/html/002693.html>.
- [9] Dominic Royé, *Meteogalicia. Download functions for Meteogalicia, 2019*. Disponible en <https://github.com/dominicroye?tab=repositories>. (Data de consulta: 15/01/2020).
- [10] Instituto Geográfico Nacional (IGN), *Centro de descargas*. Disponible en <http://centrodedescargas.cnig.es/CentroDescargas/index.jsp>. (Data de consulta: 10/01/2020).
- [11] Cutberto Uriel Paredes Hernández, Wilver Enrique Salinas Castillo, Xicoténcatl Martínez Becerra, Sergio Bernardo Jiménez Hernández, Evaluación y comparación de métodos de interpolación determinísticos y probabilísticos para la generación de modelos digitales de elevación, *Investigaciones Geográficas, Boletín del Instituto de Geografía, UNAM*, **82**, 118–130, 2013. Disponible en <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0188461113727900>.
- [12] Diego Murillo, Irene Ortega, Juan David Carrillo, Andrés Pardo, Jeiser Rendón, Comparación de Métodos de interpolación para la generación de mapas de ruido en entornos urbanos, *Ing. USBMed*, **3**(1), 62–68, 2012. Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4694125.pdf>.
- [13] *ArcMap. Documentation. ArcGIS Desktop*, Versión 10.5, 2019. Disponible en <https://desktop.arcgis.com/es/arcmap/> e <https://desktop.arcgis.com/es/arcmap/10.3/tools/3d-analyst-toolbox/comparing-interpolation-methods.htm>.
- [14] Noel Cressie, *Statistics for spatial data*, John Wiley & Sons, 2015.
- [15] Francisco Domínguez García-Tejero, *Topografía general y agrícola*, Salvat, 1953.
- [16] Pierre Tardi, *Traité de Géodésie. Généralités sur la Géodésie. Géodésie Mathématique. Triangulations*, Gauthier-Villars, 1934.
- [17] José Luis Ojeda Ruíz, *Métodos topográficos y oficina técnica*, Autoeditado, 1984.
- [18] Dante Alcántara García, *Topografía y sus aplicaciones*, Compañía Editorial Continental, 2014.

- [19] Luis Carlos Arboleda, Las mediciones barométricas de Humboldt y Caldas en la Nueva Granada, en Guerrero Pino, G. (comp.), *Estudios caldasianos: Ciencia y nación. A 250 años del natalicio de Francisco José de Caldas, Santiago de Cali*, Programa Editorial Universidad del Valle y Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 113–150, 2020.
- [20] Fernando García Márquez, *Curso básico de topografía. Planimetría, agrimensura, altimetría*, Pax México, 2008.